Aux Lazaristes
Sup 2

Colle 1

Logique et ensembles – Relations et applications – Calculs de sommes et de produits

Alexis Marchand
27/09/2018

Questions de cours.

1. *Énoncer et démontrer le théorème de récurrence. On utilisera le fait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*
2. *Énoncer et démontrer la propriété qui exprime le fait qu'"une relation d'équivalence induit une partition".*
3. *Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, que vaut $\sum_{k=0}^{n} a^k$ (attention à la valeur de a !) ? Le démontrer.*

1 Logique et ensembles

Exercice 1.1 (Lois de Morgan, $\star$)**.** *Soit E un ensemble et $A, B \subset E$. Montrer que :*
1. $E \backslash (A \cup B) = (E \backslash A) \cap (E \backslash B)$ **2.** $E \backslash (A \cap B) = (E \backslash A) \cup (E \backslash B)$.

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *Soit X un ensemble. Pour $f : X \to X$, on définit f^n par récurrence en posant $f^0 = \mathrm{id}_X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.*

1. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f^n \circ f$.*
2. *Si f est bijective, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(f^{-1}\right)^n = (f^n)^{-1}$.*

Exercice 1.3 (Inégalité de Bernoulli, $\star$)**.**

1. *Montrer (de deux manières différentes) que $\forall a \in]-1, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.*
2. *Étudier les cas d'égalité.*

Exercice 1.4 ($\star$)**.** *On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $F_1 = F_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}.$$

Exercice 1.5 ($\star$)**.** *Soit $A \subset \mathbb{N}^*$ t.q.* (i) $1 \in A$, (ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \in A \Longrightarrow 2n \in A$ *et* (iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n+1 \in A \Longrightarrow n \in A$.

1. *Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}$, $2^m \in A$.*
2. *Montrer que $A = \mathbb{N}^*$.*

Exercice 1.6 (Inégalité arithmético-géométrique, $\star$)**.** *On cherche à montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n,\ \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

1. *Démontrer l'inégalité dans le cas $n = 2$ et étudier les cas d'égalité.*
2. *En utilisant le résultat de l'exercice 1.5, démontrer l'inégalité dans le cas général.*
3. *Étudier les cas d'égalité.*

2 Relations et applications

Exercice 2.1 ($\star$)**.** *Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que :*

1. ($g \circ f$ *injective* et f *surjective*) $\Longrightarrow g$ *injective.*
2. ($g \circ f$ *surjective* et g *injective*) $\Longrightarrow f$ *surjective.*

Exercice 2.2 ($\star$)**.** *Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application. Une partie $X \subset E$ est dite f-stable lorsque $f(X) \subset X$.*

1. *Montrer que $\varnothing$, E et $f(E)$ sont des parties f-stables.*

2. *Montrer que si $X \subset E$ est f-stable, alors $f(X)$ aussi.*

3. *Montrer que si $X \subset E$ est f-stable, alors $f^{-1}(X)$ aussi.*

Exercice 2.3 ($\star$)**.** *Soit $f : E \to F$ une application. On définit une relation $\mathcal{R}_f$ sur E par :*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}_f y \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}_f$ est d'équivalence.*

2. *Caractériser l'injectivité de f en fonction des classes d'équivalence de $\mathcal{R}_f$.*

Exercice 2.4 ($\star$)**.** *Soit E un ensemble, $A, B \subset E$. On définit :*

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right. .$$

Donner une CNS sur A et B pour que f soit injective (resp. surjective).

Exercice 2.5 ($\star$)**.** *Soit $f : E \to F$.*

1. *Si $(B_i)_{i \in I}$ est une partition de F, montrer que $\left(f^{-1}(B_i)\right)_{i \in I}$ est une partition de E.*

2. *Donner un exemple où f est surjective, $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E, mais $(f(A_i))_{i \in I}$ n'est pas une partition de F.*

Exercice 2.6 ($\star$)**.** *On considère :*

$$f : \left| \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 2.7 (Fonctions indicatrices, $\star$)**.** *Soit E un ensemble. Pour $A \subset E$, on définit la fonction indicatrice de A par :*

$$\mathbb{1}_A : \left| \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

1. *Soit $A, B \subset E$. Montrer que $A = B \Longleftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.*

2. *Exprimer $\mathbb{1}_{E \setminus A}$, $\mathbb{1}_{A \cap B}$, $\mathbb{1}_{A \cup B}$ (et $\mathbb{1}_{A \triangle B}$) en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.*

Exercice 2.8 ($\star$)**.** *Soit E, F, G trois ensembles. Montrer que les ensembles $\left(E^F\right)^G$ et $E^{F \times G}$ sont en bijection.*

Exercice 2.9 (Théorème de Cantor, $\star$)**.** *Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection $E \to \mathcal{P}(E)$.*

3 Calculs de sommes et de produits

Exercice 3.1 ($\star$)**.** *Calculer les sommes suivantes :*

1. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ **2.** $\sum_{k=1}^{n} k\left(k^2+1\right)$ **3.** $\sum_{k=1}^{n} (k-2)(k+3)$.

Exercice 3.2 ($\star$)**.** *Calculer les sommes suivantes :*

1. $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} i^2 j^3$ **2.** $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{i+3} 2j^2 i$ **3.** $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j+1}$ **4.** $\sum_{0 \leqslant i+j \leqslant n} (i+j)$.