Colle 14

Espaces vectoriels et applications linéaires

Alexis Marchand
14/02/2019

Questions de cours.

1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$. Caractériser le fait que F soit un sous-espace vectoriel de E.*
2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels. Caractériser le fait que F et G soient supplémentaires dans E.*
3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$. Caractériser le fait que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ soit libre.*

1 Espaces vectoriels

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base :*

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2z = 0\}$.
2. $\left\{P \in \mathbb{R}[X],\ \widetilde{P}(1) = 0\right\}$.
3. $\left\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n = 0\right\}$.

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $\varepsilon_i = e_1 + \cdots + e_i$.*

1. *Montrer que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de E.*
2. *Exprimer les composantes d'un vecteur dans la base ε en fonction de ses composantes dans e.*

Exercice 1.3 ($\star$)**.** *Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynôme de $\mathbb{K}[X]$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}, \deg P_n = n$.*

1. *Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(P_0, \ldots, P_N)$ est une base de $\mathbb{K}_N[X]$.*
2. *Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.*

Exercice 1.4 ($\star$)**.** *On se place dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des réels deux à deux distincts. Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, on considère $\mathrm{f}_i : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\lambda_i t}$. Ainsi, $\mathrm{f}_i \in E$. Montrer que $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_r$ sont libres.*

Exercice 1.5 ($\star$)**.** *Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels deux à deux distincts. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, soit $f_k : x \longmapsto |x - \alpha_k|$. Montrer que $f_1, \ldots, f_n$ sont libres.*

Exercice 1.6 ($\star$)**.** *Soit $0 = a_0 < \cdots < a_{n+1} = 1$. On note V l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues t.q. pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $f_{|[a_i, a_{i+1}]}$ est affine.*

1. *Montrer que V est un espace vectoriel.*
2. *Déterminer une base de V.*

Exercice 1.7 ($\star$)**.** *On se place dans $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On considère $\Phi : f \in E \longmapsto \int_0^1 f \in \mathbb{R}$. Donner un supplémentaire de $\operatorname{Ker} \Phi$ dans E.*

Exercice 1.8 ($\star$)**.** *Si $\mathfrak{P}$ dénote l'ensemble des nombres premiers, montrer que la famille $(\ln p)_{p\in\mathfrak{P}}$ est libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.*

Exercice 1.9 ($\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $p, q : E \to E$ deux projecteurs de même image. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(1 - \lambda)p + \lambda q$ est un projecteur de même image que p et q.*

Exercice 1.10 (ENSI '85, $\star$)**.** *Soit X un ensemble et $f : X \to \mathbb{R}$ une application t.q. $f(X)$ est infini. Montrer que la famille $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^X$.*

Exercice 1.11 ($\star$)**.** *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *Si F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels stricts de E, montrer que $F_1 \cup F_2 \subsetneq E$.*
2. *Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \ldots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels stricts de E, montrer que $F_1 \cup \cdots \cup F_n \subsetneq E$.*