Colle 17
Intégrales sur un segment – Développements limités

Alexis Marchand
28/03/2019

Questions de cours.

1. *Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales, avec les cas d'égalité.*
2. *Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.*
3. *Énoncer et démontrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

1 Intégrales sur un segment

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $\int_{-1}^{1} \frac{e^{2t}}{e^t+1}\ \mathrm{d}t$
2. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$
3. $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$
4. $\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\ \mathrm{d}t$
5. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$
6. $\int_0^1 \frac{t\ \mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$
7. $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}$.

Exercice 1.3 ($\star$)**.** *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose :*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k\pi}{n^2}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad \textit{et} \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n^2}\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

1. *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
2. *En déduire* $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 1.4 ($\star$)**.** *Soit* $a<b$ *des réels. Soit* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. *On suppose qu'il existe* $n\in\mathbb{N}$ *t.q.*

$$\forall k \in \{0,\dots,n\},\ \int_a^b x^k f(x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

Montrer que f *admet au moins* $(n+1)$ *zéros sur* $]a,b[$.

Exercice 1.5 ($\star$)**.** *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+)$. *Déterminer :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\int_0^1 f^n}.$$

Exercice 1.6 (Lemme de Riemann-Lebesgue, $\star$)**.** *Soit* $a<b$ *deux réels. Si* $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ *est continue par morceaux, on souhaite montrer que :*

$$\int_a^b f(x)e^{inx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1. *Comment prouver le résultat si* f *est supposée* $\mathcal{C}^1$ *?*
2. *Prouver le résultat dans le cas général.*

2 Développements limités

Exercice 2.1 ($\star$)**.** *Déterminer les limites suivantes :*

1. $\lim_{x\to0} \frac{\sin(\operatorname{sh} x)-\operatorname{sh}(\sin x)}{(e^x-1-x)^2}$.
2. $\lim_{x\to0} \frac{\frac{\sin x}{1-\sin x}-\sin\left(\frac{x}{1-x}\right)}{x^4}$.
3. $\lim_{x\to0} \left(\frac{x^2-\sin^2 x}{(\sin x - x\cos x)^2}-\frac{3}{x^2}\right)$.
4. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)+\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{n^4}$.

Exercice 2.2 ($\star$)**.** *Soit* $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x e^{x^2}$.

1. *Justifier l'existence de réels* a, b, c *t.q.*

$$f(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o_0\left(x^5\right).$$

2. *Déterminer en fonction de* a, b, c *un développement limité à l'ordre* $o\left(x^5\right)$ *de* f^{-1} *en* 0.

Exercice 2.3 ($\star$)**.** *On considère :*

$$f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \int_x^{1/x} e^{-t} \ln t \, \mathrm{d}t.$$

Déterminer un développement limité à l'ordre $o\left((x-1)^5\right)$ *de* f *en* 1.

Exercice 2.4 ($\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2$. *On suppose que* $M_0 = \sup_{\mathbb{R}} |f|$ *et* $M_2 = \sup_{\mathbb{R}} |f''|$ *sont finis. Montrer que* $M_1 = \sup_{\mathbb{R}} |f'|$ *est fini et que* $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$.

Exercice 2.5 ($\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2$. *On suppose que* $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} f'' = 0$.

1. *À l'aide d'une formule de Taylor, majorer* f' *à l'aide de* f *et* f''.
2. *Montrer que* $\lim_{+\infty} f' = 0$.
3. *Trouver des contre-exemples en supprimant l'hypothèse* $\lim_{+\infty} f = 0$ *ou* $\lim_{+\infty} f'' = 0$.

Exercice 2.6 ($\star$)**.**

1. *Pour* $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, *montrer l'existence de* $\vartheta_x \in]0,1[$ *t.q.*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} \cos\left(x \vartheta_x\right).$$

2. *Étudier* $\lim_{x \to 0} \vartheta_x$.

Exercice 2.7 (Polytechnique '17, $\star$)**.** *Soit* $a \in \mathbb{R}$. *On définit une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *par :*

$$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \tanh u_n.$$

Donner la limite, puis un équivalent, puis un développement asymptotique à deux termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.