Questions de cours.

1. *Donner l'ensemble de solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants dans le cas complexe.*
2. *Donner l'ensemble de solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.*
3. *Étant donnée une équation différentielle linéaire du premier ordre, comment obtient-on les solutions à partir des solutions de l'équation homogène ?*

1 Équations différentielles

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $xy' = \alpha y$.*

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)\, y = 0$.*

Exercice 1.3 ($\star$)**.** *On considère l'équation différentielle $xy' = 2y$. Donner l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Exprimer les solutions comme combinaisons linéaires de deux fonctions particulières.*

Exercice 1.4 (Équation de Bernoulli, $\star$)**.** *Montrer que l'équation $y' = ay^n + by$ se ramène à une équation linéaire, où a et b sont des fonctions continues, $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.*

Exercice 1.5 ($\star$)**.** *Caractériser les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ t.q. toute solution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 1.6 ($\star$)**.** *Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $4xy'' + 2y' - y = 0$.*

Exercice 1.7 ($\star$)**.** *On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y'' + |y| = 0 \\ y(0) = a \quad \text{et} \quad y'(0) = 0 \end{cases},$$

où $a \in \mathbb{R}$. Soit y une solution (si elle existe).

1. *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) \leqslant a$.*
2. *Déterminer y lorsque $a \leqslant 0$.*

Dans la suite, on suppose que $a > 0$.

3. *Montrer que y s'annule en exactement deux points $b_- < 0$ et $b_+ > 0$, que l'on déterminera.*
4. *Déterminer y.*

Exercice 1.8 ($\star$)**.** *Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(2 - x).$$

Exercice 1.9 ($\star$)**.** *Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x + \cos x.$$