Calcul Différentiel 2

Cours de Jean-Claude Sikorav
Notes de Alexis Marchand

ENS de Lyon
S2 2017-2018
Niveau L3

Table des matières

1 Inversion locale et fonctions implicites

1.1 Théorème du point fixe d'une contraction

Théorème 1.1.1 (Théorème du point fixe d'une contraction)**.** *Si (X, d) est un espace métrique complet et $f : X \to X$ est contractante, alors f admet un unique point fixe.*

Remarque 1.1.2. *Le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites reposent essentiellement sur le théorème du point fixe d'une contraction.*

1.2 Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites

Définition 1.2.1 (Difféomorphisme local)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et $x_0 \in U$. On dit qu'une application $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geqslant 1$) est un* difféomorphisme local *en x_0 lorsqu'il existe un voisinage ouvert U' de x_0 dans U et un ouvert $V \subset F$ t.q. $f_{|U'} : U' \to V$ est un difféomorphisme.*

Théorème 1.2.2 (Théorème d'inversion locale)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et $x_0 \in U$. Soit $f : U \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geqslant 1$) t.q. $\mathrm{d}f(x_0) : E \to F$ est inversible. Alors f est un difféomorphisme local en x_0.*

Démonstration. Voir cours "Topologie et Calcul Différentiel". □

Corollaire 1.2.3. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E. Soit $f : U \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geqslant 1$) t.q. $\forall x \in U$, $\mathrm{d}f(x)$ est inversible. Alors f est ouverte.*

Théorème 1.2.4 (Théorème des fonctions implicites)**.** *Soit E, F et G trois espaces de Banach, $\mathcal{U}$ un ouvert de $E \times F$ et $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Soit $f : \mathcal{U} \to G$ de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geqslant 1$). On suppose que $\mathrm{d}_2 f(x_0, y_0) : F \to G$ est inversible. Alors il existe des voisinages ouverts V de x_0 dans E, W de y_0 dans F, et une application $h : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^k$ t.q. $V \times W \subset \mathcal{U}$ et :*

$$\forall (x, y) \in V \times W,\ (f(x, y) = f(x_0, y_0) \Longleftrightarrow y = h(x))\,.$$

Démonstration. Voir cours "Topologie et Calcul Différentiel". $\square$

1.3 Forme normale d'une submersion en dimension finie

Définition 1.3.1 (Submersion)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et $x_0 \in U$. On dit qu'une application $f : U \to F$ différentiable en x_0 est une* submersion *en x_0 lorsque $\mathrm{d}f(x_0) : E \to F$ est surjective.*

Proposition 1.3.2. *Soit E un espace de Banach, F un espace vectoriel de dimension finie et U un ouvert de E. Soit $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $\{x \in U,\ f \text{ est une submersion en } x\}$ est un ouvert de U.*

Théorème 1.3.3 (Théorème de forme normale d'une submersion)**.** *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E et $x_0 \in U$. Soit $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geqslant 1$) une submersion en x_0. Alors il existe un voisinage ouvert U' de x_0 dans U, un ouvert V de* $\operatorname{Ker} \mathrm{d}f(x_0) \times F$ *et un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\varphi : U' \to V$ t.q.*

$$\forall (y, t) \in V,\ f \circ \varphi^{-1}(y, t) = t.$$

Démonstration. Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} \mathrm{d}f(x_0)$ dans E, et soit π la projection sur $\operatorname{Ker} \mathrm{d}f(x_0)$ parallèlement à S. On pose :

$$\varphi : x \in U \longmapsto (\pi(x), f(x)) \in \operatorname{Ker} \mathrm{d}f(x_0) \times F.$$

Alors φ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $\mathrm{d}\varphi(x_0)$ est inversible, car $\forall h \in E$, $\mathrm{d}\varphi(x_0) \cdot h = (\pi(h), \mathrm{d}f(x_0) \cdot h)$. Selon le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U' de x_0 dans E et un ouvert V de $\operatorname{Ker} \mathrm{d}f(x_0) \times F$ t.q. $\varphi_{|U'} : U' \to V$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme. Par construction, si $p_F : \operatorname{Ker} \mathrm{d}f(x_0) \times F \to F$ est la projection sur F, on a $f = p_F \circ \varphi$ (sur U'), d'où $f \circ \varphi^{-1} = p_F$ (sur V). $\square$

Remarque 1.3.4. *Le théorème de forme normale d'une submersion reste vrai, avec la même démonstration, dès qu'on peut trouver un supplémentaire fermé de* $\operatorname{Ker} \mathrm{d}f(x_0)$ *dans E. C'est par exemple le cas si E est un espace de Hilbert.*

Remarque 1.3.5. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E et $x_0 \in U$. Soit $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$.*

(i) *Le théorème d'inversion locale dit que, si* $\mathrm{d}f(x_0)$ *est bijectif, alors à difféomorphisme près, f est localement égale à l'identité.*

(ii) *Le théorème de forme normale d'une submersion dit que, si* $\mathrm{d}f(x_0)$ *est surjectif, alors à difféomorphisme près, f est localement égale à une projection.*

2 Sous-variétés en dimension finie

2.1 Définitions : sous-variétés, redressement local, carte

Définition 2.1.1 (Sous-variété)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie N, $0 \leqslant n \leqslant N$, et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On dit qu'une partie non vide $M \subset E$ est une* sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension

n de E lorsque tout point $x \in M$ admet un voisinage ouvert U dans E et un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme Φ de U sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$ t.q.

$$\Phi(M \cap U) = (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap \Phi(U).$$

Un tel difféomorphisme Φ est appelé un redressement local *de M en x. De plus, si $p_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n} \to \mathbb{R}^n$ est la projection sur $\mathbb{R}^n$, alors l'application :*

$$\varphi = p_{\mathbb{R}^n} \circ \Phi_{|M \cap U} : M \cap U \to \mathbb{R}^n$$

est appelée carte *de M. C'est un homéomorphisme de $M \cap U$ sur l'ouvert $\{y \in \mathbb{R}^n,\ (y, 0) \in V\}$ de $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 2.1.2. *La dimension d'une sous-variété est bien définie : M ne peut pas être à la fois une sous-variété de dimension n et de dimension n', avec $n \neq n'$.*

Vocabulaire 2.1.3. *Les sous-variétés de classe $\mathcal{C}^\infty$ sont dites* lisses.

Vocabulaire 2.1.4. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie N.*

(i) *Les sous-variétés de dimension 1 de E sont appelées* courbes.

(ii) *Les sous-variétés de dimension 2 de E sont appelées* surfaces.

(iii) *Les sous-variétés de dimension $(N-1)$ de E sont appelées* hypersurfaces.

(iv) *Les sous-variétés de dimension 0 de E sont les parties discrètes non vides de E.*

(v) *Les sous-variétés de dimension N de E sont les ouverts non vides de E.*

2.2 Propriété de graphe local

Proposition 2.2.1 (Propriété de graphe local)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie N, $0 \leqslant n \leqslant N$, et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit $M \subset E$ une partie non vide. S'équivalent :*

(i) *M est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n de E.*

(ii) *Pour tout point $x \in M$, il existe des voisinages ouverts U de x dans E et U_1 de 0 dans $\mathbb{R}^n$, un isomorphisme linéaire $u : E \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$ et une application $h : U_1 \to \mathbb{R}^{N-n}$ de classe $\mathcal{C}^k$ t.q.*

$$u(M \cap U) = \{(y, h(y)),\ y \in U_1\}.$$

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $x \in M$, soit U, U_1, u, h comme ci-dessus. On pose :

$$\Psi : (y, z) \in U_1 \times \mathbb{R}^{N-n} \longmapsto (y, z - h(y)) \in U_1 \times \mathbb{R}^{N-n}.$$

Alors Ψ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme. Ainsi, si $\Phi = \Psi \circ u$, alors Φ réalise un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U sur $\Phi(U)$ et $\Phi(M \cap U) = (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap \Phi(U)$. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $x \in M$. Soit U un voisinage ouvert de x dans E et $\Phi : U \to \Phi(U)$ un redressement local de M en x. On peut supposer que $\Phi(x) = 0$. On pose alors $u = \mathrm{d}\Phi(x) : E \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$, qui est un isomorphisme linéaire, et $U_0 = \{y \in \mathbb{R}^n,\ (y, 0) \in \Phi(U)\}$, qui est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Posons :

$$\psi = \mathrm{d}\Phi(x) \circ \Phi^{-1} \circ (id_{\mathbb{R}^n}, 0) : U_0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}.$$

Alors $u(M \cap U) = \psi(U_0)$. Écrivons enfin $\psi = (\varphi, h_1)$. On vérifie que $\mathrm{d}\varphi(0)$ est inversible, donc φ induit un difféomorphisme local sur un voisinage ouvert U_1 de 0. Ainsi $h = h_1 \circ \varphi^{-1}$ fournit le résultat. □

Exemple 2.2.2 (Cercle et sphères)**.**

(i) *Le cercle $\mathbb{S}^1$ est une sous-variété lisse de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$. On peut le montrer en construisant un redressement local avec les coordonnées polaires, ou bien avec des graphes locaux.*

(ii) *La sphère de dimension n $\mathbb{S}^n$ est une sous-variété lisse de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$. On peut le montrer en construisant un redressement local à l'aide de la projection stéréographique.*

2.3 Équation locale d'une sous-variété

Proposition 2.3.1 (Équation locale d'une sous-variété)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie N, $0 \leqslant n \leqslant N$, et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit $M \subset E$ une partie non vide. S'équivalent :*

(i) *M est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n de E.*

(ii) *Pour tout point $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans E et une application de classe $\mathcal{C}^k$ $f : U \to \mathbb{R}^{N-n}$ qui est une submersion (en tout point de U) et t.q.*

$$M \cap U = f^{-1}(\{0\}).$$

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $x \in M$. Soit U un voisinage ouvert de x dans E et $\Phi : U \to \Phi(U)$ un redressement local de M en x. On note $p_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n} \to \mathbb{R}^{N-n}$ la deuxième projection et on pose $f = p \circ \Phi : U \to \mathbb{R}^{N-n}$. Alors f est $\mathcal{C}^k$, c'est une submersion, et $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$. (ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $x \in M$. Soit U et f comme ci-dessus. Selon le théorème de forme normale d'une submersion (théorème 1.3.3), il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x dans E et un difféomorphisme $\Phi : V \to \Phi(V) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$ t.q.

$$\forall (y,t) \in \Phi(V),\ f \circ \Phi^{-1}(y,t) = t.$$

Ainsi, $\Phi(M \cap U) = (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap \Phi(V)$. □

Exemple 2.3.2 (Groupes linéaires)**.**

(i) *$SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ \det M = 1\}$ est une hypersurface lisse de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.*

(ii) *$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tMM = I_n\}$ est une sous-variété lisse de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.*

Exemple 2.3.3 (Grassmanniennes)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. On définit $G(k,n)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$, ou de manière équivalente :*

$$G(k,n) = \left\{P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tP = P = P^2 \text{ et } \operatorname{rg} P = k\right\}.$$

Ainsi, $G(k,n)$ est une sous-variété lisse de dimension $k(n-k)$ de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Si $k = 1$, on retrouve l'espace projectif de dimension $(n-1)$.

2.4 Propriétés topologiques des sous-variétés

Proposition 2.4.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie N, et soit M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n de E. Alors :*

(i) *M est métrisable (donc séparée).*

(ii) *M est localement euclidienne de dimension n (i.e. tout point de M admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$).*

(iii) *M est localement fermée dans E (i.e. tout point de M admet un voisinage U dans E t.q. $M \cap U$ est fermé dans U).*

(iv) *M est localement compacte.*

(v) *M est localement connexe par arcs (donc localement connexe). En particulier, les composantes connexes de M (qui sont ses composantes connexes par arcs) sont des ouverts de M.*

Exemple 2.4.2. *Soit X un espace topologique. Alors toute partie localement fermée de X est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé.*

2.5 Sous-espace tangent

Définition 2.5.1 (Sous-espace tangent)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie N, et soit M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n de E. Pour $x \in M$, on définit le* sous-espace tangent *à M en x par :*

$$T_x M = \left\{ \gamma'(0),\ \gamma \in \mathcal{C}^0\left(\left]-\varepsilon, +\varepsilon\right[, M\right),\ \gamma \text{ dérivable en } 0 \text{ et } \gamma(0) = x \right\}.$$

Proposition 2.5.2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie N, et soit M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n de E. Alors pour tout $x \in M$, $T_x M$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension n.*

Démonstration. Soit U un voisinage ouvert de x et $\Phi : U \to \Phi(U)$ un redressement local de M en x. La donnée d'un chemin $\gamma \in \mathcal{C}^0\left(\left]-\varepsilon, +\varepsilon\right[, M\right)$ équivaut à celle d'un chemin :

$$\gamma_1 \in \mathcal{C}^0\left(\left]-\varepsilon, +\varepsilon\right[, (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap \Phi(U)\right)$$

(avec $\gamma_1 = \Phi \circ \gamma$, ce qui est possible quitte à restreindre l'intervalle de définition de γ de telle sorte que $\gamma\left(\left]-\varepsilon, +\varepsilon\right[\right) \subset U$). Ainsi :

$$\begin{aligned} T_x M &= \left\{ \mathrm{d}\Phi(x)^{-1} \circ \gamma_1'(0),\ \gamma_1 \in \mathcal{C}^0\left(\left]-\varepsilon, +\varepsilon\right[, (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap \Phi(U)\right),\ \gamma \text{ dérivable en } 0 \text{ et } \gamma(0) = x \right\} \\ &= \mathrm{d}\Phi(x)^{-1}\left(\left\{ \gamma_1'(0),\ \gamma_1 \in \mathcal{C}^0\left(\left]-\varepsilon, +\varepsilon\right[, (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap \Phi(U)\right),\ \gamma \text{ dérivable en } 0 \text{ et } \gamma(0) = x \right\} \right) \\ &= \mathrm{d}\Phi^{-1}(x) \cdot (\mathbb{R}^n \times \{0\}). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.5.3. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie N, et soit M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n de E. Soit U un voisinage ouvert d'un point x_0 dans E et soit $f : U \to \mathbb{R}^{N-n}$ une submersion de classe $\mathcal{C}^k$ t.q. $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$. Alors :*

$$T_{x_0} M = \operatorname{Ker} \mathrm{d}f(x_0).$$

2.6 Propriété de graphe sur l'espace tangent

Théorème 2.6.1 (Propriété de graphe sur l'espace tangent)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie N, et soit M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ de E. Soit $x \in M$ et S un supplémentaire de $T_x M$ dans E (par exemple $S = T_x M^\perp$ si E est euclidien). Alors M est localement le graphe d'une application $T_x M \to S$, i.e. il existe U voisinage ouvert de x dans E, V voisinage ouvert de 0 dans $T_x M$ et $h : V \to S$ de classe $\mathcal{C}^k$ avec $h(0) = 0$ et $\mathrm{d}h(0) = 0$ t.q.*

$$M \cap U = \{x + y + h(y),\ y \in V\}.$$

De plus, h est unique.

2.7 Forme normale d'une immersion en dimension finie

Définition 2.7.1 (Immersion)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et $x_0 \in U$. On dit qu'une application $f : U \to F$ différentiable en x_0 est une* immersion *en x_0 lorsque $\mathrm{d}f(x_0) : E \to F$ est injective.*

Théorème 2.7.2 (Théorème de forme normale d'une immersion)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geqslant 1$) une immersion en x_0. Alors il existe un voisinage ouvert V de $f(x_0)$ dans $\mathbb{R}^N$, un ouvert W de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$ et un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\psi : V \to W$ t.q.*

$$\forall t \in f^{-1}(V),\ \psi \circ f(t) = (t - x_0, 0).$$

Remarque 2.7.3. *Notons que si f est $\mathcal{C}^1$, alors l'application* $\operatorname{rg} \circ \mathrm{d}f$ *est semi-continue inférieurement (on le voit en remarquant qu'une matrice est de rang au moins r* ssi *elle admet un mineur non nul d'ordre r). Ceci permet de retrouver les théorème de forme normale d'une immersion (théorème 2.7.2) et d'une submersion (théorème 1.3.3) à partir du théorème du rang constant.*

2.8 Paramétrage local d'une sous-variété

Définition 2.8.1 (Paramétrage local). *Soit E un espace vectoriel de dimension finie N, et soit M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n de E. On appelle* paramétrage local *en un point $x_0 \in M$ de M toute immersion injective de classe $\mathcal{C}^k$ $\psi : V \to M$, où V est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $x_0 = \psi(0)$.*

Définition 2.8.2 (Plongement). *Soit X et Y deux espaces topologiques. On dit qu'une application continue $f : X \to Y$ est un* plongement *lorsque f est injective et réalise un homéomorphisme sur son image.*

Remarque 2.8.3. *Si $f : X \to Y$ est une application continue et injective entre espaces topologiques, alors f est un plongement dès que l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(i) *X est compact et Y est séparé.*

(ii) *X et Y sont localement compacts et f est propre (i.e. l'image réciproque d'un compact est un compact).*

Théorème 2.8.4.

(i) *Soit E un espace vectoriel de dimension finie N, et soit M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n de E. Si $\psi : V \to M$ est un paramétrage local de M en x_0, et si $\varphi : M \cap U \to \mathbb{R}^n$ est une carte en x_0, alors quitte à réduire V, $\varphi \circ \psi$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.*

(ii) *Tout paramétrage local d'une sous-variété est un homéomorphisme sur son image (donc un plongement).*

(iii) *Soit E un espace vectoriel de dimension finie N, et soit M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n de E. Soit $\psi_1 : V_1 \to M$ et $\psi_2 : V_2 \to M$ deux paramétrages locaux de M. Alors $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.*

(iv) *Soit $M \subset E$ une partie non vide t.q. tout point est l'image d'une immersion de classe $\mathcal{C}^k$ injective et ouverte $\psi : U \to M$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors M est une sous-variété de E de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n.*

Exemple 2.8.5. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. On considère :*

$$f : t \in \mathbb{R} \longmapsto \left(e^{it}, e^{i\alpha t}\right) \in \left(\mathbb{S}^1\right)^2.$$

Alors f est une immersion injective, mais pas un plongement, et $f(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^4$. On a en fait $\overline{f(\mathbb{R})} = (\mathbb{S}^1)^2$.

Proposition 2.8.6. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie N, et soit M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n de E. Soit $\psi : V \to M$ un paramétrage local de M en x_0. Alors :*

$$T_{x_0}M = \operatorname{Im} \mathrm{d}\psi(0).$$

3 Applications différentiables entre sous-variétés

3.1 Applications différentiables

Définition 3.1.1 (Application différentiable). *Soit E un espace vectoriel de dimension finie N, et soit M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n de E. Soit F un espace de Banach, $f : M \to F$ et $x_0 \in M$. S'équivalent :*

(i) *Il existe une carte φ en x_0 t.q. $f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable en 0.*

(ii) *Pour toute carte φ en x_0, $f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable en 0.*

(iii) *Il existe un paramétrage local ψ en x_0 t.q. $f \circ \psi$ est différentiable en 0.*

(iv) *Pour tout paramétrage local ψ en x_0, $f \circ \psi$ est différentiable en* 0.

On dit alors que f est différentiable *en x_0.*

Remarque 3.1.2. *On définit de même les notions d'applications ℓ fois différentiables et de classe $\mathcal{C}^\ell$, à condition que $\ell \leqslant k$.*

Exemple 3.1.3. *Soit U un ouvert d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $M \subset U$ une sous-variété de E de classe $\mathcal{C}^k$. Si $f : U \to F$ est de classe $\mathcal{C}^\ell$, où $\ell \leqslant k$ et F est un espace de Banach, alors $f_{|M}$ est de classe $\mathcal{C}^\ell$.*

Définition 3.1.4 (Différentielle)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie N, et soit M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n de E. Soit F un espace de Banach, $f : M \to F$ et $x_0 \in M$. On suppose que f est différentiable en x_0. Si $\psi : V \to M$ est un paramétrage local de M en x_0, on définit :*

$$\mathrm{d}f\,(x_0) = \mathrm{d}(f \circ \psi)(0) \circ [\mathrm{d}\psi(0)]^{-1} \in \mathcal{L}\,(T_{x_0}M, F)\,.$$

Cette définition est indépendante du choix de ψ.

Remarque 3.1.5. *Si φ est une carte de M en x_0, alors* $\mathrm{d}f\,(x_0) = \mathrm{d}(f \circ \varphi^{-1})(0) \circ \mathrm{d}\varphi\,(x_0)\,.$

Proposition 3.1.6. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit M et N des sous-variétés respectives de E et F. Soit $x_0 \in M$ et $f : M \to N$ une application différentiable en x_0. Alors :*

$$\mathrm{d}f\,(x_0) \cdot T_{x_0}M \subset T_{f(x_0)}N.$$

On peut donc considérer $\mathrm{d}f\,(x_0)$ *comme un élément de* $\mathcal{L}\left(T_{x_0}M, T_{f(x_0)}N\right)$.

Proposition 3.1.7. *Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie. Soit M, N, P des sous-variétés respectives de E, F, G. Soit $x_0 \in M$, $f : M \to N$ et $g : N \to P$. On suppose que f est différentiable en x_0 et que g est différentiable en $f\,(x_0)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en x_0 et :*

$$\mathrm{d}(g \circ f)\,(x_0) = \mathrm{d}g\,(f\,(x_0)) \circ \mathrm{d}f\,(x_0)\,.$$

3.2 Fibré tangent

Définition 3.2.1 (Fibré tangent)**.** *Soit M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n d'un espace vectoriel E de dimension finie. On définit le* fibré tangent *de M par :*

$$TM = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_xM \subset E \times E.$$

Proposition 3.2.2. *Soit M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n d'un espace vectoriel E de dimension finie. Si $k \geqslant 2$, alors TM est une sous-variété de $E \times E$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de dimension $(2n)$.*

Démonstration. Soit $(x, y) \in TM$. Soit U un voisinage ouvert de x dans E et $f : U \to \mathbb{R}^{N-n}$ une submersion de classe $\mathcal{C}^k$ t.q. $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$. Alors :

$$TM \cap (U \times E) = \bigcup_{x \in M \cap U} (\{x\} \times \operatorname{Ker} \mathrm{d}f(x)) = \hat{f}^{-1}(\{(0,0)\})\,,$$

où $\hat{f} : (u, v) \in U \times E \longmapsto (f(u), \mathrm{d}f(u) \cdot v) \in \mathbb{R}^{N-n} \times \mathbb{R}^{N-n}$. Ainsi $\hat{f}$ est une submersion de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, ce qui prouve le résultat. □

Remarque 3.2.3. *Si M est seulement $\mathcal{C}^1$, alors TM est une sous-variété topologique (i.e. TM est localement euclidien).*

Exemple 3.2.4.

(i) *Si M est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, alors $TM = M \times \mathbb{R}^N$.*

(ii) *$T\mathbb{S}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.*

(iii) *$TSL_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $SL_n(\mathbb{R}) \times \operatorname{Ker} \operatorname{tr}$.*

(iv) *$TO_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, où $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices antisymétriques.*

Remarque 3.2.5. *Il est en général faux que TM est homéomorphe à $M \times \mathbb{R}^n$, avec $n = \dim M$.*

Exemple 3.2.6. *$T\mathbb{S}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.*

3.3 Application tangente globale

Définition 3.3.1 (Application tangente globale)**.** *Soit M et N des sous-variétés respectives d'espaces vectoriels E et F de dimension finie. Soit $f : M \to N$ une application différentiable. On définit l'*application tangente globale *de f par :*

$$Tf : \left| \begin{array}{l} TM \longrightarrow TN \\ (x,v) \longmapsto (f(x), \mathrm{d}f(x) \cdot v) \end{array} \right. .$$

Proposition 3.3.2. *Soit M et N des sous-variétés de classe $\mathcal{C}^k$ respectives d'espaces vectoriels E et F de dimension finie. Soit $f : M \to N$ une application de classe $\mathcal{C}^k$. Alors $Tf : TM \to TN$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.*

Exemple 3.3.3. *Si M est une sous-variété d'un espace vectoriel E de dimension finie, et $\varphi : U \cap M \to V \subset \mathbb{R}^n$ est une carte $\mathcal{C}^k$ de M, alors $T\varphi : TM \cap (U \times E) \to V \times \mathbb{R}^n$ est une carte de TM.*

Définition 3.3.4 (Difféomorphisme)**.** *Soit M et N des sous-variétés de classe $\mathcal{C}^k$ respectives d'espaces vectoriels E et F de dimension finie. On dit qu'une application $f : M \to N$ est un $\mathcal{C}^k$-*difféomorphisme *lorsque f est bijective, de classe $\mathcal{C}^k$, et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$.*

Remarque 3.3.5. *$f : M \to N$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme* ssi *f est bijective, $\mathcal{C}^k$, et $\mathrm{d}f(x)$ est inversible pour tout $x \in M$.*

3.4 Classification des courbes à difféomorphisme près

Définition 3.4.1 (Paramétrage par longueur d'arc)**.** *Soit C une courbe (i.e. une sous-variété de dimension 1) de classe $\mathcal{C}^k$ d'un espace vectoriel E de dimension finie. On appelle* paramétrage par longueur d'arc *de C toute application $\gamma : I \to C$ dérivable t.q. $\forall t \in I$, $\|\gamma'(t)\| = 1$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.*

Remarque 3.4.2. *Un paramétrage par longueur d'arc qui est injectif et de classe $\mathcal{C}^k$ est aussi un paramétrage local (au sens de la définition 2.8.1).*

Proposition 3.4.3. *Soit C une courbe de classe $\mathcal{C}^k$ d'un espace vectoriel E de dimension finie.*

(i) *Si γ est un paramétrage par longueur d'arc de C et $a \in \mathbb{R}$, alors $t \longmapsto \gamma(a+t)$ et $t \longmapsto \gamma(a-t)$ sont aussi des paramétrages par longueur d'arc de C.*

(ii) *Si $x \in C$ et $v \in T_xC$ avec $\|v\| = 1$, alors il existe un paramétrage par longueur d'arc γ de C de classe $\mathcal{C}^k$ t.q. $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.*

(iii) *Tous les paramétrages par longueur d'arc de C sont de classe $\mathcal{C}^k$.*

(iv) *Si γ_1 et γ_2 sont deux paramétrages par longueurs d'arc de C t.q. $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$, alors il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ t.q. $\gamma_2(t_2 + t) = \gamma_1(t_1 + \varepsilon t)$ dès que les deux membres sont bien définis.*

Démonstration. (i) Clair. (ii) Soit $\psi : I \to C$ un paramétrage local (au sens de la définition 2.8.1) de C, avec I voisinage ouvert de 0 et $\psi(0) = x$. On peut supposer que $\psi'(0) = v$. Posons :

$$\ell : t \in I \longmapsto \int_0^t \|\psi'(u)\| \, du.$$

Comme ψ' ne s'annule pas, $\|\psi'\|$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, donc ℓ est de classe $\mathcal{C}^k$, et $\forall t \in I$, $\ell'(t) = \|\varphi'(t)\| \neq 0$. Donc ℓ est $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $I \to J$, avec $J = \ell(I)$. Soit $\varphi = \ell^{-1} : J \to I$. On pose $\gamma = \psi \circ \varphi$. Alors γ est un paramétrage par longueur d'arc de classe $\mathcal{C}^k$ de C et vérifie $\gamma'(0) = v$. (iii) Soit $\gamma : I \to C$ un paramétrage par longueur d'arc de C. Selon (ii), il existe un paramétrage par longueur d'arc $\gamma_0 : I_0 \to C$ de C de classe $\mathcal{C}^k$. Vu la preuve de (ii), γ_0 est un paramétrage local de C, donc on peut le supposer bijectif quitte à réduire I_0. On peut de plus supposer que $\gamma(I) \subset \gamma_0(I_0)$. On pose alors $\phi = \gamma_0^{-1} \circ \gamma$. Alors ϕ est $\mathcal{C}^1$ et on vérifie que $\forall t \in I$, $\phi'(t) \in \{-1, 1\}$. Par connexité de I, ϕ' est constante, donc ϕ est affine, d'où on en déduit que γ est $\mathcal{C}^k$. (iv) La même preuve que pour (iii) s'applique en remplaçant γ_0 par n'importe quel paramétrage par longueur d'arc, qui est automatiquement $\mathcal{C}^k$ d'après (iii). □

Théorème 3.4.4. *Soit C une courbe connexe de classe $\mathcal{C}^k$ d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors C est $\mathcal{C}^k$-difféomorphe à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{S}^1$.*

Démonstration. Soit $x \in C$ et soit $v \in T_x C$ t.q. $\|v\| = 1$. Selon la proposition 3.4.3, il existe des paramétrages par longueur d'arc $\gamma : I \to C$ t.q. $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$; et de tels paramétrages coïncident sur leur domaine commun. Il existe donc un unique paramétrage par longueur d'arc $\gamma_v : I \to C$ maximal (i.e. avec I maximal) et t.q. $\gamma_v(0) = x$ et $\gamma_v'(0) = v$. Ce paramétrage par longueur d'arc est alors une $\mathcal{C}^k$-immersion. On va montrer que γ_v est difféomorphe à $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou à $p : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{2i\pi t} \in \mathbb{S}^1$. Comme γ_v est une immersion équidimensionnelle (i.e. entre deux espaces de même dimension), γ_v est ouverte. Par ailleurs, selon le (iv) de la proposition 3.4.3, pour $v' \neq v$, les images de γ_v et $\gamma_{v'}$ sont égales ou disjointes. Comme ces images sont toutes ouvertes et C est connexe, γ_v est surjective. *Cas 1* : γ_v est injective. Alors γ_v est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $I \to C$, et I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{C}^k$-difféomorphe à $\mathbb{R}$. *Cas 2* : γ_v est non injective. On pose alors :

$$T = \inf \{t > 0, \ \gamma_v(t) = \gamma_v(0)\}.$$

Alors $T > 0$ car γ_v est localement injective. Par le (iv) de la proposition 3.4.3, on a $\gamma_v(t) = \gamma_v(T + \varepsilon t)$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Par injectivité locale de γ_v en $\frac{T}{2}$, on obtient $\varepsilon = 1$. Donc γ_v est T-périodique, et T est la période minimale. On en déduit que l'application $t \longmapsto \gamma(tT)$ se factorise en une application $\psi : \mathbb{S}^1 \to C$:

$$\forall t, \ \gamma(tT) = \psi \circ p(t),$$

avec $p : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{2i\pi t} \in \mathbb{S}^1$. Et on a ψ bijective par minimalité de T. De plus, ψ est $\mathcal{C}^k$ car p est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local. Et ψ est une immersion équidimensionnelle, donc ψ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\mathbb{S}^1 \to C$. □

3.5 Points critiques d'une fonction sur une sous-variété

Définition 3.5.1 (Points critiques et points réguliers)**.** *Soit M une sous-variété d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On pose :*

$$\mathrm{Crit}(f) = \{x \in M, \ \mathrm{d}f(x) = 0\} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Reg}(f) = \{x \in M, \ \mathrm{d}f(x) \neq 0\}.$$

Les éléments de $\mathrm{Crit}(f)$ *sont appelés* points critiques *de f ; ceux de* $\mathrm{Reg}(f)$ *sont appelés* points réguliers *de f.*

Remarque 3.5.2. *Soit M une sous-variété d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.*

(i) $\mathrm{Crit}(f)$ *est un fermé de* M*.*

(ii) $\mathrm{Reg}(f)$ *est un ouvert de* M*.*

(iii) *Un point* $x \in M$ *est régulier* ssi f *est une submersion en* x*.*

Proposition 3.5.3. *Soit* M *une sous-variété d'un espace vectoriel* E *de dimension finie. Soit* $f : M \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable. Si* $x \in M$ *est un extremum local de* f*, alors* $\mathrm{d}f(x) = 0$*.*

Remarque 3.5.4. *Soit* U *un ouvert d'un espace vectoriel* E *de dimension finie,* $h : U \to \mathbb{R}^q$ *une submersion de classe* $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$*. On considère* $M = h^{-1}(\{0\})$*. Alors* M *est une sous-variété de classe* $\mathcal{C}^k$ *et de codimension* q *de* E*. Si* $\hat{f} : U \to \mathbb{R}$ *est différentiable, et* $f = \hat{f}_{|M}$*, alors* f *est différentiable, et :*

$$\forall x \in M,\ \mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}\hat{f}(x)_{|T_xM}.$$

Ainsi, comme $T_xM = \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}h(x)$ *:*

$$\begin{aligned}\forall x \in M,\ x \in \mathrm{Crit}(f) &\iff \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}h(x) \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\hat{f}(x)\\ &\iff \exists \lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}),\ \mathrm{d}\hat{f}(x) = \lambda \circ \mathrm{d}h(x).\end{aligned}$$

En cas d'existence, λ *est unique. Si* $q = 1$*,* λ *est un réel appelé* multiplicateur de Lagrange.

3.6 Hessienne d'une fonction en un point critique

Remarque 3.6.1. *Soit* U *et* V *des ouverts respectifs de deux espaces vectoriels* E *et* F *de dimension finie. Soit* G *un espace vectoriel de dimension finie. Soit* $f : U \to V$ *deux fois différentiable en un point* $x \in U$*, soit* $g : V \to G$ *deux fois différentiable en* $f(x)$*. Alors :*

$$\mathrm{d}^2(g \circ f)(x) = \mathrm{d}^2 g(f(x)) \cdot (\mathrm{d}f(x), \mathrm{d}f(x)) + \mathrm{d}g(f(x)) \cdot \mathrm{d}^2 f(x).$$

Définition 3.6.2 (Hessienne)**.** *Soit* M *une sous-variété d'un espace vectoriel* E *de dimension finie. Soit* $f : M \to \mathbb{R}$*. On suppose que* f *est deux fois différentiable en un point* $x_0 \in M$ *t.q.* x_0 *est un point critique. Si* $\psi : V \to M$ *est un paramétrage local de* M *en* x_0*, on définit la* hessienne *de* f *en* x_0 *comme la forme bilinéaire symétrique suivante :*

$$(\mathrm{Hess}\, f)(x_0) = \mathrm{d}^2(f \circ \psi)(0) \cdot \left(\mathrm{d}\psi(0)^{-1}, \mathrm{d}\psi(0)^{-1}\right).$$

Avec l'hypothèse $\mathrm{d}f(x_0) = 0$*, cette définition est indépendante du choix de* ψ*.*

Proposition 3.6.3. *Soit* M *une sous-variété d'un espace vectoriel* E *de dimension finie. Soit* $f : M \to \mathbb{R}$*. On suppose que* f *est deux fois différentiable en un point* $x_0 \in M$ *t.q.* x_0 *est un point critique.*

(i) *Si* f *a un maximum (resp. minimum) local en* x_0*, alors* $(\mathrm{Hess}\, f)(x_0)$ *est une forme bilinéaire symétrique négative (resp. positive).*

(ii) *Si* $(\mathrm{Hess}\, f)(x_0)$ *est une forme bilinéaire symétrique définie négative (resp. positive), alors* f *a un maximum (resp. minimum) local strict en* x_0*.*

3.7 Lemme de Morse

Définition 3.7.1 (Indice d'une forme quadratique)**.** *Soit* $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une forme quadratique. Alors il existe une base* $(e_1, \ldots, e_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$*, des entiers* $(i, r) \in \mathbb{N}^2$ *t.q.*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ q(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = -\sum_{k=1}^{i} x_k^2 + \sum_{k=i+1}^{r} x_k^2.$$

Le couple (i, r) *est indépendant du choix de la base* $(e_1, \ldots, e_n)$*.* r *est égal au rang de* q *et* i *est appelé* indice *de* q*. De même, l'indice d'une forme bilinéaire symétrique est l'indice de la forme quadratique associée.*

Définition 3.7.2 (Point critique non dégénéré)**.** *Soit M une sous-variété d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et $x_0 \in M$ un point critique de f. On dit que le point critique x_0 est* non dégénéré*, ou* de Morse*, lorsque* $(\text{Hess}\, f)(x_0)$ *est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. On appelle alors* indice *de f en x_0 l'indice de* $(\text{Hess}\, f)(x_0)$*.*

Théorème 3.7.3 (Lemme de Morse)**.** *Soit M une sous-variété de dimension n d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 3$), et $x_0 \in M$ un point critique non dégénéré de f d'indice i. Alors il existe un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un paramétrage local $\psi : V \to M$ de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ t.q.*

$$\forall v \in V,\ f \circ \psi(v) = f(x_0) + \frac{1}{2} (\text{Hess}\, f)(x_0) \cdot (\mathrm{d}\psi(0) \cdot v, \mathrm{d}\psi(0) \cdot v),$$

ou de manière équivalente : $\forall v \in V,\ f \circ \psi(v) = f(x_0) - \sum_{k=1}^{i} v_k^2 + \sum_{k=i+1}^{n} v_k^2$.

Démonstration. On se place sans perte de généralité dans le cas où M est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $x_0 = 0$, $f(0) = 0$ et $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\frac{1}{2}\, \mathrm{d}^2 f(0) \cdot (v, v) = -\sum_{k=1}^{i} x_k^2 + \sum_{k=i+1}^{n} x_k^2$. Selon la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in M,\ f(x) = \int_0^1 (1-t)\, \mathrm{d}^2 f(tx) \cdot (x, x)\ \mathrm{d}t = q_x(x),$$

avec $q_x : v \in \mathbb{R}^n \longmapsto \int_0^1 (1-t)\, \mathrm{d}^2 f(tx) \cdot (v, v) \in \mathbb{R}$. Pour $x \in M$, q_x est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, soit donc $S_x \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices symétriques) t.q.

$$\forall v \in \mathbb{R}^n,\ q_x(v) = \langle S_x v \mid v \rangle.$$

Ainsi, l'application $x \in M \longmapsto S_x \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^{k-2}$. Et notons que :

$$S_0 = \begin{bmatrix} -I_i & 0 \\ 0 & I_{n-i} \end{bmatrix}.$$

Nous allons diagonaliser S_x à paramètre, c'est-à-dire trouver $\mu : M \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ t.q. $\forall x \in M$, ${}^t\mu(x) S_0 \mu(x) = S_x$. Considérons pour cela l'application :

$$g : A \in GL_n(\mathbb{R}) \longmapsto {}^tA S_0 A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}g(I_n) \cdot H = {}^tH S_0 + S_0 H$. Comme $S_0 \in GL_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}g(I_n) : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est surjective. Donc g est une submersion en I_n, et admet donc une section locale $s : \widetilde{U} \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, où $\widetilde{U}$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, t.q. $g \circ s = id_{\widetilde{U}}$. On choisit alors U voisinage ouvert de 0 dans M t.q. $\forall x \in U$, $S_x \in \widetilde{U}$, et on pose $\mu : x \in U \longmapsto s(S_x)$. Alors :

$$\forall x \in U,\ f(x) = \left\langle {}^t\mu(x) S_0 \mu(x) x \mid x \right\rangle = \langle S_0 \mu(x) x \mid \mu(x) x \rangle = q_0(\mu(x) x).$$

L'application $\varphi : x \in U \longmapsto \mu(x) x \in \mathbb{R}^n$ est alors de classe $\mathcal{C}^{k-2}$; sa différentielle en 0 est inversible, donc il existe un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et une application $\psi : V \to U$ t.q. $\varphi \circ \psi = id_V$. Ainsi :

$$\forall x \in V,\ f \circ \psi(x) = q_0(x).$$

□

4 Théorie métrique des courbes

4.1 Courbes régulières, longueur, paramétrage par longueur d'arc

Définition 4.1.1 (Courbe régulière)**.** *Soit E un espace euclidien. On appelle* courbe régulière *dans E toute application $\gamma : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 1$), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, t.q. γ' ne s'annule pas (i.e. γ est une immersion).*

Remarque 4.1.2. *Une courbe régulière n'est pas forcément un plongement, ni même une application injective.*

Définition 4.1.3 (Longueur d'une courbe régulière)**.** *Soit E un espace euclidien et $\gamma : I \to E$ une courbe régulière. On définit la* longueur *de γ par :*

$$\ell(\gamma) = \int_I \|\gamma'(t)\| \; \mathrm{d}t \in [0, +\infty] .$$

Si I est un segment, alors $\ell(\gamma) < +\infty$.

Définition 4.1.4 (Paramétrage par longueur d'arc)**.** *Soit E un espace euclidien et $\gamma : I \to E$ une courbe régulière. S'équivalent :*

(i) $\forall (a, b) \in I^2,\ \ell\left(\gamma_{|[a,b]}\right) = |b - a|$.

(ii) $\forall t \in I,\ \|\gamma'(t)\| = 1$.

On dit alors que γ est paramétrée par longueur d'arc*. Le paramètre est alors traditionnellement noté s, et appelé* abscisse curviligne*.*

Remarque 4.1.5. *Soit E un espace euclidien et $\gamma : I \to E$ une courbe régulière de classe $\mathcal{C}^k$. On a vu (proposition 3.4.3) que γ admet un reparamétrage $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$ par longueur d'arc avec $\varphi' > 0$. De plus, γ_1 est unique si on impose φ de classe $\mathcal{C}^k$ et si on fixe la valeur de γ_1 en un point.*

4.2 Courbure d'une courbe plane

Notation 4.2.1. *Soit E un plan euclidien orienté. On munit E d'une structure de droite complexe en posant $iv = r_{\frac{\pi}{2}}(v)$ pour tout $v \in E$, où $r_{\frac{\pi}{2}}$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de 0, i.e. l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi :*

(i) $i^2 = -1$.

(ii) $\forall (v, w) \in E^2,\ \det(v, w) = \langle iv \mid w \rangle$.

Si $(v, w) \in E^2$ avec $w \neq 0$, alors il existe un unique complexe, noté $\frac{v}{w} \in \mathbb{C}$, t.q. $v = \frac{v}{w} w$.

Définition 4.2.2 (Vecteur tangent, vecteur normal)**.** *Soit E un plan euclidien orienté et $\gamma : I \to E$ une courbe régulière. Soit $t \in I$.*

(i) *Le* vecteur tangent unitaire *à γ en $\gamma(t)$ est $\vec{t}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.*

(ii) *Le* vecteur normal unitaire *à γ en $\gamma(t)$ est $\vec{n}(t) = i\vec{t}(t)$.*

Définition 4.2.3 (Courbure)**.** *Soit E un plan euclidien orienté et $\gamma : I \to E$ une courbe régulière de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrée par longueur d'arc. Pour $s \in I$, on définit la* courbure *de γ en $\gamma(s)$ par :*

$$\kappa_\gamma(s) = \frac{\gamma''(s)}{i\gamma'(s)}.$$

Autrement dit, $\kappa_\gamma(s)$ est l'unique scalaire t.q.

$$\gamma''(s) = \kappa_\gamma(s)\vec{n}(s).$$

$\kappa_\gamma(s)$ est un réel car $\langle \gamma'' \mid \gamma' \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle \gamma' \mid \gamma' \rangle\right)' = 0$. Et on définit ainsi une application $\kappa_\gamma : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k-2}$.

Remarque 4.2.4. *La courbure a la dimension de l'inverse d'une longueur.*

Proposition 4.2.5. *Soit E un plan euclidien orienté et $\gamma : I \to E$ une courbe régulière de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 2$) paramétrée par longueur d'arc. Soit $s_0 \in I$; soit $\theta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ avec $\theta(s_0) = 0$ t.q.*

$$\forall s \in I,\ \gamma'(s) = e^{i\theta(s)}\gamma'(s_0).$$

Alors :

$$\forall s \in I,\ \kappa_\gamma(s) = \theta'(s).$$

Corollaire 4.2.6. *Soit E un plan euclidien orienté, I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors pour toute application continue $\kappa : I \to \mathbb{R}$, il existe une courbe régulière γ de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrée par longueur d'arc t.q. $\kappa_\gamma = \kappa$. De plus, γ est unique à isométrie affine près.*

Exemple 4.2.7. *Soit $\gamma : s \in \mathbb{R} \longmapsto p_0 + Re^{\pm i\frac{s}{R}} \in \mathbb{R}^2$. Alors γ est une courbe régulière de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrée par longueur d'arc, de courbure constante égale à $\pm\frac{1}{R}$.*

4.3 Courbes gauches : courbure et torsion

Définition 4.3.1 (Courbe birégulière)**.** *Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Une courbe régulière $\gamma : I \to E$ est dite* birégulière *lorsque pour tout $t \in I$, $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ sont indépendants.*

Remarque 4.3.2. *La notion de birégularité est conservée par reparamétrage.*

Remarque 4.3.3. *Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Une courbe régulière $\gamma : I \to E$ paramétrée par longueur d'arc est birégulière* ssi *γ'' ne s'annule pas.*

Définition 4.3.4 (Normale principale et binormale)**.** *Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et soit $\gamma : I \to E$ une courbe birégulière. Soit $t \in I$.*

(i) *Le* vecteur tangent unitaire *à γ en $\gamma(t)$ est $\vec{t}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.*

(ii) *La* normale principale *à γ en $\gamma(t)$ est $\vec{n}(t) = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|}$.*

(iii) *La* binormale *à γ en $\gamma(t)$ est $\vec{b}(t) = \vec{t}(t) \wedge \vec{n}(t)$.*

Ainsi, $\left(\vec{t}(t), \vec{n}(t), \vec{b}(t)\right)$ est une base orthonormée directe de E, appelée repère de Frenet*.*

Définition 4.3.5 (Courbure)**.** *Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et soit $\gamma : I \to E$ une courbe birégulière. Pour $t \in I$, on définit la* courbure *de γ en $\gamma(t)$ par :*

$$\kappa_\gamma(t) = \|\gamma''(t)\|.$$

Définition 4.3.6 (Torsion)**.** *Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et soit $\gamma : I \to E$ une courbe birégulière. Pour $t \in I$, on définit la* torsion *de γ en $\gamma(t)$ par :*

$$\tau(t) = \left\langle \vec{n}'(t) \mid \vec{b}(t) \right\rangle.$$

Remarque 4.3.7. *Une courbe birégulière est plane* ssi *sa torsion est nulle partout.*

5 Théorie métrique des surfaces

5.1 Première forme fondamentale

Notation 5.1.1. *Dans ce chapitre, on se place dans un espace euclidien E de dimension 3 ; on appelle* surface *toute sous-variété Σ de dimension 2 et de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 2$) de E.*

Définition 5.1.2 (Première forme fondamentale)**.** *Soit $\Sigma \subset E$ une surface. Pour $p \in \Sigma$, la* première forme fondamentale *en p est la restriction du produit scalaire de E au plan tangent $T_p\Sigma$; on la note* I_p *et on le considère comme une forme quadratique :*

$$\forall x \in T_p\Sigma,\ \mathrm{I}_p(x) = \|x\|^2 .$$

La première forme fondamentale est aussi appelée métrique riemannienne *induite sur Σ.*

Proposition 5.1.3. *Soit $\Sigma \subset E$ une surface. On considère $p : U \to \Sigma$ un paramétrage local de Σ, avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$. On se donne $(u,v) \in U$, on note $p = p(u,v)$, $p_u = \frac{\partial p}{\partial u}(u,v)$, $p_v = \frac{\partial p}{\partial v}(u,v)$. Ainsi, $T_p\Sigma = \mathrm{Vect}\,(p_u, p_v)$. Et dans la base (p_u, p_v), la première forme fondamentale s'écrit :*

$$\forall\,(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{I}_p\,(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v) = \|p_u\|^2\,\mathrm{d}u^2 + 2\,\langle p_u \mid p_v\rangle\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \|p_v\|^2\,\mathrm{d}v^2.$$

Autrement dit, la matrice de I_p dans la base (p_u, p_v) est :

$$\mathcal{M}_{(p_u,p_v)}\,(\mathrm{I}_p) = \begin{pmatrix} \|p_u\|^2 & \langle p_u \mid p_v\rangle \\ \langle p_u \mid p_v\rangle & \|p_v\|^2 \end{pmatrix}.$$

On note souvent $(E, F, G) = \left(\|p_u\|^2, \langle p_u \mid p_v\rangle, \|p_v\|^2\right)$.

Remarque 5.1.4. *La première forme fondamentale est aussi notée $\mathrm{d}s^2$ (c'est le carré de l'élément de longueur de Σ).*

5.2 Distance riemannienne, isométries et déformations isométriques

Définition 5.2.1 (Distance riemannienne)**.** *Soit $\Sigma \subset E$ une surface. On définit une distance sur Σ en posant :*

$$\forall\,(p, p') \in \Sigma^2,\ d_\Sigma\,(p, p') = \inf\left\{\ell\,(\gamma)\,,\ \gamma : [0,1] \to \Sigma \text{ chemin } \mathcal{C}^1_{pm} \text{ dans } \Sigma \text{ de } p \text{ à } p'\right\},$$

où $\ell(\gamma)$ est la longueur du chemin γ (c.f. définition 4.1.3), et avec la convention $\inf \varnothing = +\infty$.

Définition 5.2.2 (Isométrie infinitésimale)**.** *Soit $\Sigma \subset E$ et $\Sigma' \subset E'$ deux surfaces. On dit qu'une application $f : \Sigma \to \Sigma'$ de classe $\mathcal{C}^1$ est une* isométrie (infinitésimale) *lorsque :*

$$\forall p \in \Sigma,\ \forall v \in T_p\Sigma,\ \|\mathrm{d}f(p) \cdot v\| = \|v\|.$$

Autrement dit, f conserve la première forme fondamentale.

Définition 5.2.3 (Surface plate)**.** *Soit $\Sigma \subset E$ une surface. S'équivalent :*

(i) *Σ est localement isométrique (de manière infinitésimale) à un plan.*

(ii) *Pour tout $p \in \Sigma$, il existe une base de $T_p\Sigma$ dans laquelle la matrice de la première forme fondamentale est égale à l'identité.*

On dit alors que Σ est plate*.*

Définition 5.2.4 (Déformation isométrique)**.** *Soit $\Sigma \subset E$ une surface. On appelle* déformation isométrique *de Σ toute application $F : \Sigma \times I \to E$ de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 0$), avec I intervalle de $\mathbb{R}$, t.q. pour tout $t \in I$, $\Sigma_t = F\,(\Sigma \times \{t\})$ est une surface et $F\,(\cdot, t) : \Sigma \to \Sigma_t$ est une isométrie (infinitésimale). De manière équivalente, $F_t = F\,(\cdot, t)$ est une immersion t.q. $\forall p \in \Sigma$, $\forall v \in T_p\Sigma$, $\|\mathrm{d}F_t(p) \cdot v\| = \|v\|$.*

Définition 5.2.5 (Isométrie non triviale)**.** *On dit qu'une isométrie est* non triviale *lorsqu'elle n'est pas induite par une isométrie ambiante. De même, une déformation isométrique est dite* non triviale *lorsqu'elle n'est pas induite par une déformation isométrique ambiante.*

Proposition 5.2.6. *Toute isométrie (infinitésimale) entre surfaces est une isométrie d'espaces métriques, où chaque surface est munie de sa distance riemannienne.*

5.3 Trois familles de surfaces plates

Exemple 5.3.1 (Cylindres)**.** *Soit $P \subset E$ un plan affine, $v \in E$ un vecteur hors du plan vectoriel de P. Soit $\gamma : I \to P$ une courbe sur P. On pose :*

$$C_{\gamma,v} = \gamma + \mathbb{R}v = \{\gamma(s) + tv,\ (s,t) \in I \times \mathbb{R}\}\,.$$

Si $\|v\| = 1$ et v est orthogonal à P, alors la première forme fondamentale en un point de $C_{\gamma,v}$ est donnée par $I = \mathrm{d}s^2 + \mathrm{d}t^2$. Ainsi, $C_{\gamma,v}$ est une surface plate.

Exemple 5.3.2 (Cônes)**.** *Soit $P \subset E$ un plan affine ne contenant pas 0. Soit $\gamma : I \to P$ une courbe sur P. On pose :*

$$\mathfrak{C}_\gamma = \bigcup_{s \in I} \mathbb{R}^* \gamma(s) = \{t\gamma(s),\ (s,t) \in I \times \mathbb{R}^*\}\,.$$

Alors $\mathfrak{C}_\gamma$ est une surface plate.

Exemple 5.3.3 (Tangentes à une courbe gauche)**.** *Soit $\gamma : I \to E$ une courbe gauche birégulière. On pose :*

$$\Sigma_\gamma = \bigcup_{s \in I} (\gamma(s) + \mathbb{R}^* \gamma'(s)) = \{\gamma(s) + t\gamma'(s),\ (s,t) \in I \times \mathbb{R}^*\}\,.$$

5.4 Géodésiques

Définition 5.4.1 (Géodésique)**.** *Soit $\Sigma \subset E$ une surface. On appelle* géodésique *(classique) sur Σ toute courbe $\gamma : I \to \Sigma$ deux fois dérivable et t.q.*

$$\forall t \in I,\ \gamma''(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma^\perp.$$

Cette relation est appelée équation des géodésiques*.*

Vocabulaire 5.4.2 (Courbe paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc)**.** *Une courbe $\gamma : I \to E$ est dite* paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc *lorsque $\|\gamma'\|$ est constante.*

Définition 5.4.3 (Géodésique naturelle)**.** *Soit $\Sigma \subset E$ une surface. On appelle* géodésique naturelle *sur Σ toute courbe $\gamma : I \to \Sigma$ paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc et t.q.*

$$\exists c > 0,\ \forall s_0 \in I,\ \exists \delta > 0,\ \forall (s_1, s_2) \in [s_0 - \delta, s_0 + \delta]^2,\ s_1 < s_2 \Longrightarrow d_\Sigma(\gamma(s_1), \gamma(s_2)) = c(s_2 - s_1)\,.$$

Remarque 5.4.4. *On montre que les deux définitions de géodésiques sont en fait équivalentes.*

Exemple 5.4.5. *Les géodésiques de $\mathbb{S}^2$ sont les arcs de grands cercles, paramétrés par l'angle.*

5.5 Énergie d'un chemin

Définition 5.5.1 (Énergie d'un chemin)**.** *Soit $\Sigma \subset E$ une surface. Soit $\gamma : [a,b] \to \Sigma$ un chemin $\mathcal{C}^1$. On appelle* énergie *(ou énergie cinétique) de γ la grandeur :*

$$\mathcal{E}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \|\gamma'(t)\|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Proposition 5.5.2. *Soit $\Sigma \subset E$ une surface. Soit $\gamma : [a,b] \to \Sigma$ un chemin $\mathcal{C}^1$. Alors :*

$$\mathcal{E}(\gamma) \geqslant \frac{\ell(\gamma)^2}{2(b-a)},$$

avec égalité dès que γ est paramétré proportionnellement à la longueur d'arc.

Proposition 5.5.3. *Soit $\Sigma \subset E$ une surface. Soit $\gamma : [a,b] \to \Sigma$ un chemin $\mathcal{C}^2$. Soit $H :]-\varepsilon, +\varepsilon[\times [a,b] \to \Sigma$ une déformation $\mathcal{C}^2$ de γ à extrémités fixées :*

$$H(0,\cdot) = \gamma \quad \text{et} \quad H(\cdot, a) = \gamma(a) \quad \text{et} \quad H(\cdot, b) = \gamma(b).$$

On considère $E : u \in]-\varepsilon, +\varepsilon[\longmapsto \mathcal{E}\left(H(u,\cdot)\right)$. Alors :

$$E'(0) = -\int_a^b \left\langle \frac{\partial H}{\partial u}(0,t) \mid \gamma''(t) \right\rangle \mathrm{d}t.$$

Corollaire 5.5.4. *Toute géodésique naturelle de classe $\mathcal{C}^2$ est une géodésique classique.*

Remarque 5.5.5. *Dans un système de coordonnées locales, l'équation des géodésiques ne dépend que des coefficients de la première forme fondamentale.*

Proposition 5.5.6. *Sur une surface de classe $\mathcal{C}^2$, les géodésiques naturelles sont exactement les géodésiques classiques.*

5.6 Application de Gauß

Définition 5.6.1 (Surface co-orientable)**.** *Une surface $\Sigma \subset E$ de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ est dite* co-orientable *s'il existe une application continue $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$, dite* application de Gauß*, et t.q.*

$$\forall p \in \Sigma,\ N(p) \in T_p\Sigma^\perp.$$

Remarque 5.6.2. *Si Σ de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ admet une application de Gauß $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$, alors N est automatiquement $\mathcal{C}^{k-1}$.*

5.7 Seconde forme fondamentale

Remarque 5.7.1. *Soit $\Sigma \subset E$ une surface et $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ une application de Gauß. Alors :*

$$\forall p \in \Sigma,\ T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = N(p)^\perp = T_p\Sigma.$$

Donc, pour tout $p \in \Sigma$, la différentielle $\mathrm{d}N(p) : T_p\Sigma \to T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ est en fait un endomorphisme.

Proposition 5.7.2. *Soit $\Sigma \subset E$ une surface et $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ une application de Gauß. Alors pour tout $p \in \Sigma$, $\mathrm{d}N(p)$ est symétrique :*

$$\forall (x,y) \in (T_p\Sigma)^2,\ \langle \mathrm{d}N(p)\cdot x \mid y \rangle = \langle x \mid \mathrm{d}N(p)\cdot y \rangle.$$

Définition 5.7.3 (Seconde forme fondamentale)**.** *Soit $\Sigma \subset E$ une surface et $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ une application de Gauß. Pour $p \in \Sigma$, la* seconde forme fondamentale *en p est l'opposé de la forme bilinéaire symétrique sur $T_p\Sigma$ associée à l'endomorphisme symétrique $\mathrm{d}N(p) : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$; on la note II_p et on le considère comme une forme quadratique :*

$$\forall x \in T_p\Sigma,\ \mathrm{II}_p(x) = -\langle \mathrm{d}N(p)\cdot x \mid x \rangle.$$

Remarque 5.7.4. *La seconde forme fondamentale dépend du choix de l'application de Gauß.*

Proposition 5.7.5. *Soit $\Sigma \subset E$ une surface et $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ une application de Gauß. Soit $p \in \Sigma$. On se donne un voisinage ouvert U de p dans E, un voisinage ouvert V de 0 dans $T_p\Sigma$ et une application $h : V \to \mathbb{R}$ vérifiant $h(0) = 0$, $\mathrm{d}h(0) = 0$ et ayant la même régularité que Σ t.q.*

$$\Sigma \cap U = \{p + v + h(v)N(p),\ v \in V\}.$$

Alors :

$$\mathrm{II}_p = \mathrm{d}^2h(0).$$

Proposition 5.7.6. *Soit $\Sigma \subset E$ une surface et $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ une application de Gauß. On considère $p : U \to \Sigma$ un paramétrage local de Σ, avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$. On se donne $(u, v) \in U$, on note $p = p(u, v)$, $p_u = \frac{\partial p}{\partial u}(u, v)$ (et idem pour les dérivées d'ordre 2), $p_v = \frac{\partial p}{\partial v}(u, v)$. Ainsi, $T_p\Sigma = \mathrm{Vect}\,(p_u, p_v)$. Et dans la base (p_u, p_v), la seconde forme fondamentale s'écrit :*

$$\forall\,(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{II}_p\,(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v) = \langle N \mid p_{uu}\rangle\,\mathrm{d}u^2 + 2\,\langle N \mid p_{uv}\rangle\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \langle N \mid p_{vv}\rangle\,\mathrm{d}v^2.$$

Autrement dit, la matrice de II_p dans la base (p_u, p_v) est :

$$\mathcal{M}_{(p_u,p_v)}\,(\mathrm{II}_p) = \begin{pmatrix} \langle N \mid p_{uu}\rangle & \langle N \mid p_{uv}\rangle \\ \langle N \mid p_{uv}\rangle & \langle N \mid p_{vv}\rangle \end{pmatrix}.$$

On note souvent $(\ell, m, n) = (\langle N \mid p_{uu}\rangle\,, \langle N \mid p_{uv}\rangle\,, \langle N \mid p_{vv}\rangle)$.

5.8 Courbure de Gauß et théorème egregium

Définition 5.8.1 (Courbure de Gauß)**.** *Soit $\Sigma \subset E$ une surface et $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ une application de Gauß. La* courbure de Gauß *de Σ en un point $p \in \Sigma$ est définie par :*

$$K(p) = \det \mathrm{d}N(p) = \det\,(\mathrm{II}_p/\mathrm{I}_p)\,,$$

où $\det\,(\mathrm{II}_p/\mathrm{I}_p)$ *désigne le déterminant de II_p dans une base orthonormée pour I_p. Autrement dit, dans une base β fixée de $T_p\Sigma$:*

$$K(p) = \frac{\det_\beta \mathrm{II}_p}{\det_\beta \mathrm{I}_p}.$$

Remarque 5.8.2. *Soit $\Sigma \subset E$ une surface et $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ une application de Gauß. Soit $p \in \Sigma$.*

(i) *Si $K(p) > 0$, Σ reste d'un côté du plan tangent.*

(ii) *Si $K(p) < 0$, Σ traverse le plan tangent ; on a un point selle.*

Lemme 5.8.3. *Soit $\Sigma \subset E$ une surface et $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ une application de Gauß. On considère $p : U \to \Sigma$ un paramétrage local de Σ, avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$. On se donne $(u, v) \in U$, on note $p = p(u, v)$, $p_u = \frac{\partial p}{\partial u}(u, v)$ (et idem pour les dérivées d'ordre 2), $p_v = \frac{\partial p}{\partial v}(u, v)$.*

(i) *On a la relation suivante :*

$$\langle p_{uu} \mid p_{vv}\rangle - \|p_{uv}\|^2 = F_{uv} - \frac{1}{2}\,(E_{vv} + G_{uu})\,,$$

où $E = \|p_u\|^2$, $F = \langle p_u \mid p_v\rangle$ et $G = \|p_v\|^2$ sont les coefficients de I_p dans la base (p_u, p_v).

(ii) *Les produits scalaires de $p_{uu}^T = p_{uu} - \langle p_{uu} \mid N(p)\rangle\,N(p)$, p_{uv}^T et p_{vv}^T s'expriment en fonction de E, F, G et de leurs dérivées premières.*

Théorème 5.8.4 (Théorème egregium)**.** *Soit $\Sigma \subset E$ une surface de classe $\mathcal{C}^3$ et $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ une application de Gauß. Alors la courbure de Gauß de Σ ne dépend que de sa première forme fondamentale. Plus précisément, $K(p)$ se calcule explicitement en fonction des coefficients (et de leurs dérivées d'ordre 1 et 2) de I_p en p.*

6 Équations différentielles ordinaires

Notation 6.0.1. *Dans tout le chapitre, E est un espace de Banach.*

6.1 Définitions

Définition 6.1.1 (Équation autonome)**.** *Soit U un ouvert de E, $f \in \mathcal{C}^0(U, E)$. On dit que f est un* champ de vecteurs*. On lui associe l'*équation différentielle ordinaire autonome $x' = f(x)$. *Une solution, appelée* orbite *de f, est une application dérivable $\gamma : I \to U$, où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ t.q.*

$$\forall t \in I,\ \gamma'(t) = f(\gamma(t)).$$

Une condition initiale est un point $x_0 \in U$. Une solution vérifiant la condition initiale x_0 est une solution $\gamma : I \to U$ t.q. $0 \in I$ et $\gamma(0) = x_0$.

Proposition 6.1.2. *Soit $f : U \to E$ un champ de vecteurs, $\gamma : I \to U$ une solution de $x' = f(x)$. Alors pour tout t_0, $\gamma_{t_0} : t \longmapsto \gamma(t - t_0)$ est solution de $x' = f(x)$. Quitte à translater, on peut donc toujours supposer que $0 \in I$.*

Définition 6.1.3 (Équation non autonome)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f \in \mathcal{C}^0(U, E)$. On dit que f est un* champ de vecteurs non autonome*. On lui associe l'*équation différentielle ordinaire non autonome $x' = f(t, x)$. *Une solution est une application dérivable $\gamma : I \to E$, où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ t.q. le graphe de γ est inclus dans U et :*

$$\forall t \in I,\ \gamma'(t) = f(t, \gamma(t)).$$

Une condition initiale est un point $(t_0, x_0) \in U$. Une solution vérifiant la condition initiale (t_0, x_0) est une solution $\gamma : I \to U$ t.q. $t_0 \in I$ et $\gamma(t_0) = x_0$.

Définition 6.1.4 (Équation à solution unique)**.** *Soit $f : U \to E$ un champ de vecteurs non autonome. L'équation $x' = f(t, x)$ est dite* à solution unique *lorsque deux solutions $\gamma_1 : I_1 \to E$ et $\gamma_2 : I_2 \to E$ coïncidant en un point $t_0 \in I_1 \cap I_2$ coïncident sur $I_1 \cap I_2$.*

Exemple 6.1.5.

(i) *L'équation $x' = 0$ est à solution unique. C'est une conséquence du théorème des accroissements finis.*

(ii) *L'équation $x' = \sqrt{|x|}$ n'est pas à solution unique : la fonction nulle est solution, mais aussi les fonctions $\gamma_{t_0} : t \in \mathbb{R} \longmapsto 4(t - t_0)^2 \mathbb{1}_{[t_0, +\infty[}(t)$ pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$.*

6.2 Solution maximale

Proposition 6.2.1. *Soit $f : U \to E$ un champ de vecteurs non autonome à solution unique. Soit $(t_0, x_0) \in U$. Alors il existe une unique solution de :*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

définie sur un intervalle $I_f(t_0, x_0)$ maximal (peut-être réduit à un point) contenant t_0. Cet intervalle est non seulement un intervalle maximal mais aussi un plus grand intervalle. La valeur en t de la solution définie sur l'intervalle maximal est notée $\varphi_f^{t_0, t}(x_0)$. L'application $\varphi_f^{t_0, t}$ est appelée flot *de l'équation $x' = f(t, x)$.*

Remarque 6.2.2. *Pour une équation autonome $x' = f(x)$ à solution unique, on notera $I_f(x_0) = I_f(0, x_0)$ et $\varphi_f^t(x_0) = \varphi_f^{0,t}(x_0)$.*

Proposition 6.2.3. *Soit $f : U \to E$ un champ de vecteurs non autonome à solution unique. Soit $x \in E$, $(t_0, t_1, t_2) \in \mathbb{R}^3$. Alors l'égalité suivante est vraie dès que ses deux membres sont définis :*

$$\varphi_f^{t_0, t_2}(x) = \varphi_f^{t_1, t_2} \circ \varphi_f^{t_0, t_1}(x).$$

Proposition 6.2.4. *Soit $f : U \to E$ un champ de vecteurs non autonome à solution unique. Soit $(t_0, x_0) \in U$. Alors le domaine de définition de $\varphi_f^{t_0,t}$ est $\mathcal{D}_f(t_0, t) = \{x \in E,\ t \in I_f(t_0, x)\}$. Ainsi, $\varphi_f^{t_0,t} : \mathcal{D}_f(t_0, t) \to \mathcal{D}_f(t, t_0)$ est une bijection.*

Définition 6.2.5 (Solution globale)**.** *Soit $f : U \to E$ un champ de vecteurs non autonome à solution unique. La* solution globale *de $x' = f(t, x)$ est l'application $\Phi_f : \mathcal{D}_f \to E$ définie par :*

$$\forall (t_0, t, x) \in \mathcal{D}_f,\ \Phi_f(t_0, t, x) = \varphi_f^{t_0,t}(x),$$

où $\mathcal{D}_f = \{(t_0, t, x) \in \mathbb{R}^2 \times U,\ t \in I_f(t_0, x)\} = \{(t_0, t, x) \in \mathbb{R}^2 \times U,\ x \in \mathcal{D}_f(t_0, t)\}$.

Remarque 6.2.6. *Pour une équation autonome à solution unique, on notera $\Phi_f(t, x) = \Phi_f(0, t, x)$.*

Exemple 6.2.7 (Équations autonomes scalaires)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$, où U est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in U$. On suppose que f ne s'annule pas et on pose :*

$$F_{x_0} : x \in U \longmapsto \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{f(y)}.$$

Alors F_{x_0} est strictement monotone et continue ; l'intervalle maximal de l'équation autonome $x' = f(x)$ avec la condition initiale $x(0) = x_0$ est $I_f(x_0) = F_{x_0}(U)$, et la solution maximale est :

$$\gamma_{x_0} : t \in I_f(x_0) \longmapsto F_{x_0}^{-1}(t).$$

Dans le cas où $U \supset [0, +\infty[$ et $I_f(x_0) \cap [0, +\infty[= [0, T[$, avec $T \in \mathbb{R}_+^*$, on dit que la solution explose au temps T. En effet, on a alors $|\gamma_{x_0}(t)| \xrightarrow[t \to T^-]{} +\infty$.

6.3 Lemme de Grönwall

Théorème 6.3.1 (Lemme de Grönwall)**.** *Soit $a > 0$, $b \geqslant 0$. Soit $u : I \to E$ une application dérivable, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un point t_0. On suppose que u est dérivable et que :*

$$\forall t \in I,\ \|u'(t)\| \leqslant a\,\|u(t)\| + b.$$

Alors :

$$\forall t \in I,\ \|u(t)\| \leqslant \frac{1}{a} e^{a|t-t_0|}\left(a\,\|u(t_0)\| + b\right) - \frac{b}{a}.$$

Démonstration. On peut supposer que $t_0 = \min I$. On pose :

$$v : t \in I \longmapsto \left(\|u(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \left(a\,\|u(s)\| + b\right)\,\mathrm{d}s\right) e^{-a(t-t_0)}.$$

Alors $v(t_0) = \|u(t_0)\|$ et $\forall t \in I,\ v'(t) \leqslant b e^{-a(t-t_0)}$. On en déduit :

$$\forall t \in I,\ v(t) - v(t_0) \leqslant b \int_{t_0}^{t} e^{-a(s-t_0)}\,\mathrm{d}s = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-a(t-t_0)}\right).$$

On obtient le résultat en multipliant par $e^{a(t-t_0)}$. □

Remarque 6.3.2. *Le lemme de Grönwall reste vrai sous l'hypothèse plus faible suivante : u est continue et :*

$$\forall t \in I,\ \|u(t)\| \leqslant \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \left(a\,\|u(s)\| + b\right)\,\mathrm{d}s.$$

6.4 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 6.4.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz). *Soit $f : U \to E$ un champ de vecteurs non autonome. On suppose que f est localement lipschitzien en la variable d'espace :*

$$\forall (t_0, x_0) \in U,\ \exists \varepsilon > 0,\ \exists r > 0,\ \exists L > 0,$$
$$\forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon],\ \forall (x, x') \in \overline{B(x_0, r)}^2,\ \|f(t,x) - f(t,x')\| \leqslant L \|x - x'\|.$$

Alors :

(i) *L'équation $x' = f(t,x)$ est à solution unique.*

(ii) *Pour tout $(t_0, x_0) \in U$, l'intervalle maximal $I_f(t_0, x_0)$ est ouvert.*

Démonstration. (i) Soit γ_1, γ_2 deux solutions définies sur un intervalle I, et qui coïncident en t_0. *Première étape.* S'il existe $L > 0$ t.q. $f(t, \cdot)$ est L-lipschitzienne pour tout $t \in I$, alors :

$$\forall t \in I,\ \left\|(\gamma_1 - \gamma_2)'(t)\right\| \leqslant L \|(\gamma_1 - \gamma_2)(t)\|.$$

Par le lemme de Grönwall (théorème 6.3.1) :

$$\forall t \in I,\ \|(\gamma_1 - \gamma_2)(t)\| \leqslant e^{L(t-t_0)} \|(\gamma_1 - \gamma_2)(t_0)\| = 0.$$

Ainsi $\gamma_{1|I} = \gamma_{2|I}$. *Deuxième étape.* On revient au cas général et on considère :

$$A = \{t \in I,\ \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}.$$

Alors A est un fermé de I. Et comme f est localement lipschitzien en la variable d'espace, la première étape permet de montrer que A est un ouvert de I. A est donc un ouvert fermé non vide du connexe I, donc $A = I$. (ii) Soit $\varepsilon, r, L > 0$ comme dans l'hypothèse du caractère localement lipschitzien de f. On pose :

$$M = \sup_{\substack{|t-t_0| \leqslant \varepsilon \\ \|x - x_0\| \leqslant r}} \|f(t,x)\| \leqslant \max_{|t-t_0| \leqslant \varepsilon} \|f(t, x_0)\| + Lr < +\infty.$$

Quitte à diminuer ε, on peut supposer que $L\varepsilon < 1$ et $M\varepsilon \leqslant r$. On pose $\mathcal{E} = \mathcal{C}^0([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], E)$, qu'on munit de $\|\cdot\|_\infty$. Ainsi, $\mathcal{E}$ est un espace de Banach. On considère :

$$\mathfrak{B} = \left\{f \in \mathcal{E},\ f([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]) \subset \overline{B(x_0, r)}\right\}.$$

$\mathfrak{B}$ est un fermé de $\mathcal{E}$, donc un espace métrique complet. On définit enfin une application $F : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ par :

$$\forall \gamma \in \mathfrak{B},\ \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon],\ (F(\gamma))(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))\, \mathrm{d}s.$$

Alors on montre que $\forall (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathfrak{B}^2$, $\|F(\gamma_1) - F(\gamma_2)\|_\infty \leqslant L\varepsilon \|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty$. Ainsi, F est une contraction. Comme $\mathfrak{B}$ est complet, F admet un point fixe γ selon le théorème du point fixe d'une contraction (théorème 1.1.1). Ainsi, γ est solution de $x' = f(t,x)$ avec la condition initiale (t_0, x_0). □

Remarque 6.4.2. *L'utilisation du théorème de point fixe d'une contraction permet aussi de montrer que l'équation différentielle est à solution unique.*

6.5 Propriétés de régularité de la solution globale

Théorème 6.5.1. *Soit $f : U \to E$ un champ de vecteurs non autonome. On suppose que f est localement lipschitzien en la variable d'espace. Alors le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la solution globale Φ_f est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ et l'application $\Phi_f : \mathcal{D}_f \to E$ est continue.*

Corollaire 6.5.2. *Soit $f : U \to E$ un champ de vecteurs non autonome. On suppose que f est localement lipschitzien en la variable d'espace. Alors pour tout $(t_0, t) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{D}_f(t_0, t)$ et $\mathcal{D}_f(t, t_0)$ sont des ouverts de E et l'application $\varphi_f^{t_0,t} : \mathcal{D}_f(t_0, t) \to \mathcal{D}_f(t, t_0)$ est un homéomorphisme.*

Remarque 6.5.3. *On peut montrer de même que si on a une équation différentielle dépendant continûment d'un paramètre dans un espace topologique, alors la solution est continue par rapport à ce paramètre.*

Théorème 6.5.4. *Soit $f : U \to E$ un champ de vecteurs non autonome. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geqslant 1$ (en particulier, f est localement lipschitzien en la variable d'espace). Alors l'application $\Phi_f : \mathcal{D}_f \to E$ est de classe $\mathcal{C}^k$.*

Démonstration. On étudie les différentielles partielles $\mathrm{d}_1\Phi_f$, $\mathrm{d}_2\Phi_f$ et $\mathrm{d}_3\Phi_f$ de Φ_f par rapport aux variables t_0, t et x. Pour $\mathrm{d}_2\Phi_f$ (variable t), il est clair que la différentielle partielle est bien définie et continue. Pour $\mathrm{d}_3\Phi_f$ (variable x), on montre que c'est la solution de l'*équation différentielle linéarisée* :

$$\begin{cases} (\delta x)' = A(t) \cdot \delta x \\ \delta x(t_0) = id_E \end{cases},$$

avec $A : t \longmapsto \mathrm{d}_2 f(t_0, t, x) \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E)$, d'inconnue $\delta x : \mathbb{R} \to \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E)$. Pour $\mathrm{d}_1\Phi_f$ (variable t_0), on applique le théorème des fonctions implicites après avoir remarqué que :

$$\Phi_f(t, t_0, \Phi_f(t_0, t, x_0)) = x_0.$$

Après avoir montré que $\mathrm{d}_1\Phi_f$, $\mathrm{d}_2\Phi_f$ et $\mathrm{d}_3\Phi_f$ sont $\mathcal{C}^0$, on en déduit que Φ_f est $\mathcal{C}^1$, puis on itère. □

6.6 Critère de prolongement

Proposition 6.6.1. *Soit $f : U \to E$ un champ de vecteurs non autonome. On suppose que f est localement lipschitzien en la variable d'espace. Soit $\gamma : [a, b[\to E$ une solution définie sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$. On suppose qu'il existe un compact $K \subset U$ t.q.*

$$\forall t \in [a, b[,\ (t, \gamma(t)) \in K.$$

Alors γ se prolonge au-delà de b.

Démonstration. Par compacité de K, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a, b[^{\mathbb{N}}$ t.q. $(t_n, \gamma(t_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (b, x_\infty)$. En déduire le résultat en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 6.4.1) avec la condition initiale (b, x_∞). □

Exemple 6.6.2. *Soit $f : \mathbb{R} \times E \to E$ un champ de vecteurs non autonome. On suppose qu'il existe une application $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ t.q. :*

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times E,\ \|f(t, x)\| \leqslant \frac{C(t)}{1 + \|x\|}.$$

Alors les orbites de f sont définies sur $\mathbb{R}$.

Définition 6.6.3 (Champ de vecteurs complet)**.** *Soit $f : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien en la variable d'espace. On dit que f est* complet *lorsque toutes les orbites de f sont définies sur $\mathbb{R}$.*

Remarque 6.6.4. *Pour un champ de vecteurs autonome complet $f : U \to E$, on obtient un groupe à un paramètre d'homéomorphismes de E, i.e. un morphisme de groupes :*

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Homeo}(E) \\ t \longmapsto \varphi_f^t \end{array} \right. .$$

De plus, l'application $(t, x) \longmapsto \varphi_f^t(x)$ est continue. Si f est $\mathcal{C}^k$, on a un groupe à un paramètre de $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes de E.

6.7 Équations différentielles d'ordre supérieur

Définition 6.7.1 (Équation différentielle d'ordre n)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times E^n$, $f \in \mathcal{C}^0(U, E)$. On associe à f l'*équation différentielle d'ordre n *:*

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right).$$

Une solution est une application n fois dérivable $\gamma : I \to E$, où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ t.q.

$$\forall t \in I,\ \gamma^{(n)}(t) = f\left(t, \gamma(t), \gamma'(t), \ldots, \gamma^{(n-1)}(t)\right).$$

Une condition initiale est un $(n+1)$-uplet $\left(t_0, x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}\right)$.

Remarque 6.7.2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times E^n$, $f \in \mathcal{C}^0(U, E)$. Alors l'équation différentielle d'ordre n $x^{(n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right)$ se ramène à l'équation différentielle non autonome du premier ordre $y = F(t, y)$ dans l'espace E^n, en posant :*

$$y : t \longmapsto \left(x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right) \quad \textit{et} \quad F : (t, u_0, \ldots, u_{n-1}) \longmapsto (u_1, \ldots, u_{n-1}, f(t, u_0, \ldots, u_{n-1})).$$

7 Équations différentielles linéaires

7.1 Intervalle maximal des équations linéaires

Définition 7.1.1 (Équation différentielle linéaire)**.** *Une* équation différentielle linéaire *est une équation différentielle ordinaire non autonome de la forme $x' = A(t)x$, où $A : I \to \mathcal{L}_\mathcal{C}(E)$ est une application continue à valeurs dans les endomorphismes continus de E, avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.*

Théorème 7.1.2. *Soit $A : I \to \mathcal{L}_\mathcal{C}(E)$ une application continue, avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, l'équation différentielle linéaire $x' = A(t)x$ avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ a une unique solution définie sur I tout entier.*

7.2 Résolvante

Définition 7.2.1 (Résolvante)**.** *Soit $A : I \to \mathcal{L}_\mathcal{C}(E)$ continue, avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On sait (théorème 7.1.2) que le domaine de définition de la solution globale de l'équation $x' = A(t)x$ est $\mathcal{D}_A = I \times I \times E$. On dispose donc d'une application $\Phi_A : I \times I \times E \to E$. À $(t_0, t) \in I \times I$ fixé, l'application $\Phi_A(t_0, t, \cdot) : E \to E$ est linéaire continue ; on la note $R_A(t_0, t)$. On appelle* résolvante *de l'équation $x' = A(t)x$ l'application $R_A : I \times I \to \mathcal{L}_\mathcal{C}(E)$.*

Remarque 7.2.2. *Pour une équation autonome, on notera $R_A(t) = R_A(0, t)$.*

Proposition 7.2.3. *Soit $A : I \to \mathcal{L}_\mathcal{C}(E)$ continue, avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Alors à t_0 fixé, la résolvante $R_A(t_0, \cdot)$ de l'équation $x' = A(t)x$ est solution de l'équation dans $\mathcal{L}_\mathcal{C}(E)$ suivante :*

$$\begin{cases} R' = A(t) \cdot R \\ R(t_0) = id_E \end{cases}.$$

Proposition 7.2.4. *Soit $A : I \to \mathcal{L}_\mathcal{C}(E)$ continue, avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que les $(A(t))_{t \in I}$ commutent deux à deux. Alors la résolvante de $x' = A(t)x$ est donnée par :*

$$\forall (t_0, t) \in I \times I,\ R_A(t_0, t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s)\ \mathrm{d}s\right).$$

Corollaire 7.2.5. *Si $A \in \mathcal{L}_\mathcal{C}(E)$, alors la résolvante de l'équation $x' = Ax$ est donnée par :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ R_A(t) = \exp(tA).$$

7.3 Comportement asymptotique des solutions des équations à coefficients constants

Notation 7.3.1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $A \in \mathcal{L}(E)$. On note* $\mathrm{Sp}(A)$ *l'ensemble des valeurs propres de A sur $\mathbb{C}$ (i.e. l'ensemble des racines de χ_A). On pose de plus :*

(i) *Le* spectre stable *de A :* $\mathrm{Sp}_-(A) = \{\lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \Re(\lambda) < 0\}$,

(ii) *Le* spectre indifférent *de A :* $\mathrm{Sp}_0(A) = \{\lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \Re(\lambda) = 0\}$,

(iii) *Le* spectre instable *de A :* $\mathrm{Sp}_+(A) = \{\lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \Re(\lambda) > 0\}$.

On a $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}_-(A) \sqcup \mathrm{Sp}_0(A) \sqcup \mathrm{Sp}_+(A)$. *On note E_-, E_0 et E_+ les sous-espaces stables associés, de sorte que $E = E_- \oplus E_0 \oplus E_+$.*

Remarque 7.3.2. *Comme on a la décomposition $E = E_- \oplus E_0 \oplus E_+$, on peut se limiter au cas où* $\mathrm{Sp}(A)$ *est soit stable, soit indifférent, soit instable. De plus,* $\mathrm{Sp}(A)$ *est stable* ssi $\mathrm{Sp}(-A)$ *est instable. On peut donc se limiter au cas où* $\mathrm{Sp}(A)$ *est soit stable soit indifférent.*

Proposition 7.3.3. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $A \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{Sp}(A)$ *est stable.*

(ii) *Il existe un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ sur E et un $C > 0$ t.q.*

$$\forall x \in E,\ \langle x \mid Ax \rangle \leqslant -C \left\| x \right\|^2 .$$

De manière équivalente, pour tout $x_0 \in E$, la fonction $t \longmapsto e^{Ct} \left\| e^{tA} x_0 \right\|$ est décroissante.

(iii) *Si E est muni d'une norme $\|\cdot\|$ quelconque, il existe $C > 0$ t.q.*

$$\forall x_0 \in E,\ \exists K > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \left\| e^{tA} x_0 \right\| \leqslant K e^{-Ct}.$$

(iv) *Pour tout $x_0 \in E$, $e^{tA} x_0 \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.*

Proposition 7.3.4. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $A \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$ *et A est semi-simple (i.e. diagonalisable sur $\mathbb{C}$).*

(ii) *Il existe un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ sur E et un $C > 0$ t.q.*

$$\forall x \in E,\ \langle x \mid Ax \rangle = 0.$$

De manière équivalente, pour tout $x_0 \in E$, la fonction $t \longmapsto \left\| e^{tA} x_0 \right\|$ est constante.

(iii) *Si E est muni d'une norme $\|\cdot\|$ quelconque, on a :*

$$\forall x_0 \in E,\ \exists K > 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\| e^{tA} x_0 \right\| \leqslant K.$$

7.4 Wronskien

Notation 7.4.1. *Dans cette section, on suppose que $\dim_{\mathbb{R}} E = n < +\infty$ et que E est muni d'un élément de volume orienté (par exemple, $E = \mathbb{R}^n$).*

Définition 7.4.2 (Wronskien d'une équation linéaire d'ordre 1)**.** *Soit $A : I \to \mathcal{L}(E)$ continue, avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sont n solutions de $x' = A(t)x$, on définit le* wronskien *de $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ par :*

$$w_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n} : t \in I \longmapsto \det\left(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)\right).$$

Proposition 7.4.3. *Soit $A : I \to \mathcal{L}(E)$ continue, avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $R_A : I \times I \to \mathcal{L}(E)$ la résolvante de $x' = A(t)x$. Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sont n solutions de $x' = A(t)x$, alors :*

$$\forall \left(t_0, t\right) \in I^2,\ w_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}(t) = \det\left(R_A\left(t_0, t\right)\right) w_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}\left(t_0\right).$$

Proposition 7.4.4. *Soit $A : I \to \mathcal{L}(E)$ continue, avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $R_A : I \times I \to \mathcal{L}(E)$ la résolvante de $x' = A(t)x$. On fixe $t_0 \in I$ et on considère $R = R_A(t_0, \cdot)$. Alors* $\det R$ *vérifie l'équation différentielle linéaire scalaire suivante :*

$$(\det R)' = \operatorname{tr}(A(t)) \det R.$$

Par conséquent :

$$\forall (t_0, t) \in I^2,\ \det(R_A(t_0, t)) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(s))\ \mathrm{d}s\right) = \det\left(\exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\ \mathrm{d}s\right)\right).$$

Définition 7.4.5 (Wronskien d'une équation scalaire d'ordre n)**.** *Soit $a_0, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ continues, avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On considère l'équation scalaire suivante :*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0.$$

Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sont n solutions, on définit leur wronskien *par :*

$$w_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n} : t \in I \longmapsto \begin{vmatrix} \gamma_1(t) & \gamma_2(t) & \cdots & \gamma_n(t) \\ \gamma_1'(t) & \gamma_2'(t) & \cdots & \gamma_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_1^{(n-1)}(t) & \gamma_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \gamma_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Remarque 7.4.6. *La notion de wronskien d'une équation scalaire d'ordre n correspond à celle de wronskien d'une équation linéaire d'ordre* 1 *avec la remarque 6.7.2.*

Proposition 7.4.7. *Soit $a_0, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ continues, avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On considère l'équation scalaire $x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$. Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sont n solutions, alors leur wronskien est solution de l'équation suivante :*

$$(w_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n})' = -a_{n-1}(t) \cdot w_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}.$$

7.5 Champs préservant le volume

Notation 7.5.1. *Dans cette section, on suppose que* $\dim_{\mathbb{R}} E = n < +\infty$.

Définition 7.5.2 (Divergence et jacobien)**.** *Soit U un ouvert de E et $f : U \to E$ un champ de vecteurs différentiable. On définit :*

(i) $\operatorname{div} f = \operatorname{tr} \circ \mathrm{d}f$.

(ii) $\operatorname{jac} f = \det \circ \mathrm{d}f$.

Proposition 7.5.3. *E possède une unique mesure de Lebesgue à un facteur constant près ; on la note λ_n.*

Proposition 7.5.4. *Soit U et V deux ouverts de E, $\varphi : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Alors :*

$$\forall B \in \operatorname{Bor}(U),\ \lambda_n(\varphi(B)) = \int_B |\operatorname{jac} \varphi|\ \mathrm{d}\lambda_n.$$

Proposition 7.5.5. *Soit $f : U \to E$ un champ de vecteurs non autonome de classe $\mathcal{C}^1$. On note $\varphi_f^{t_0,t}$ le flot de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$. S'équivalent :*

(i) *Pour tout t,* $(\operatorname{div} f)(t, \cdot) = 0$.

(ii) *Pour tous t_0, t, $\varphi_f^{t_0,t}$ préserve le volume, i.e. $\lambda_n\left(\varphi_f^{t_0,t}(B)\right) = \lambda_n(B)$ pour $B \in \operatorname{Bor}(\mathcal{D}_f(t_0,t))$.*

8 Champs de vecteurs autonomes

8.1 Orbites périodiques

Définition 8.1.1 (Orbite périodique)**.** *Soit $f : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien. Une orbite γ de f (i.e. une solution de $x' = f(x)$) est dite* périodique *si elle est définie sur $\mathbb{R}$, non constante, et si :*

$$\exists T > 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \gamma\,(t+T) = \gamma(t).$$

L'ensemble $\{T \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \gamma\,(t+T) = \gamma(t)\}$ est un sous-groupe fermé discret de $\mathbb{R}$; il est donc de la forme $T\mathbb{Z}$, avec $T \in \mathbb{R}_+^*$. Ce T est appelé période minimale *de γ.*

Proposition 8.1.2. *Soit $f : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien. Alors une orbite non constante de f est périodique* ssi *elle est non injective.*

Démonstration. C'est une conséquence du fait que l'équation $x' = f(x)$ est à solution unique selon le théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 6.4.1). □

Proposition 8.1.3. *Soit $f : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geqslant 0$. Soit γ une orbite périodique de f, de période minimale T. Alors l'application :*

$$\overline{\gamma} : \left|\begin{array}{l} \mathbb{S}^1 \longrightarrow \gamma(\mathbb{R}) \\ e^{it} \longmapsto \gamma\left(\dfrac{T}{2\pi}t\right) \end{array}\right.$$

est bien définie et c'est un $\mathcal{C}^{k+1}$-difféomorphisme.

8.2 Fonctions de Liapounov

Notation 8.2.1. *Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien. Pour $F : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on définit :*

$$\mathrm{d}F \cdot X : \left|\begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{d}F(x) \cdot X(x) \end{array}\right. .$$

Proposition 8.2.2. *Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien. Si $F : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $\gamma : I \to U$ est une orbite de X, alors :*

$$\forall t \in I,\ (F \circ \gamma)'\,(t) = (\mathrm{d}F \cdot X)\,(\gamma(t))\,.$$

Définition 8.2.3 (Fonctions de Liapounov)**.** *Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien. Soit $F : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.*

(i) *On dit que F est une* fonction de Liapounov faible *pour X lorsque* $\forall c \in \mathbb{R},\ F^{-1}\,(]-\infty, c])$ *est compact* et $\forall x \in U,\ (\mathrm{d}F \cdot X)\,(x) \leqslant 0$.

(ii) *On dit que F est une* fonction de Liapounov forte *pour X lorsque c'est une fonction de Liapounov faible et* $\forall x \in U,\ X(x) \neq 0 \Longrightarrow (\mathrm{d}F \cdot X)\,(x) < 0$.

Proposition 8.2.4. *Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien. Soit $F : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\forall c \in \mathbb{R},\ F^{-1}\,(]-\infty, c])$ est compact.*

(i) *F est une fonction de Liapounov faible pour X* ssi *F décroît le long des orbites de X.*

(ii) *F est une fonction de Liapounov forte pour X* ssi *F décroît strictement le long des orbites non constantes de X.*

Proposition 8.2.5. *Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien. Si X admet une fonction de Liapounov faible, alors ses orbites sont définies au moins sur $[0, +\infty[$.*

8.3 Intégrales premières

8.3.1 Cas général

Définition 8.3.1 (Intégrale première)**.** *Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien. Soit $F : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. S'équivalent :*

(i) $\forall x \in U,\ (\mathrm{d}F \cdot X)(x) = 0$.

(ii) *F est constante le long des orbites de X.*

Si ces conditions sont vérifiées, et si on a de plus $\forall x \in U,\ \mathrm{d}F(x) = 0 \Longrightarrow X(x) = 0$, alors on dit que F est une intégrale première *de X.*

Proposition 8.3.2. *Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien. Si X admet une intégrale première à niveaux compacts (par exemple si l'intégrale première est une fonction propre), alors X est complet.*

8.3.2 En dimension 2

Remarque 8.3.3. *En dimension 2, si un champ de vecteurs autonome X admet une intégrale première, alors l'équation différentielle $x' = X(x)$ est résoluble par quadrature, en utilisant le théorème des fonctions implicites.*

Proposition 8.3.4. *On suppose que* $\dim E = 2$. *Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien admettant une intégrale première F de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose de plus que $\forall x \in U,\ \mathrm{d}F(x) = 0 \Longleftrightarrow X(x) = 0$. Soit $p_0 \in U$ avec $\mathrm{d}F(p_0) \neq 0$, soit :*

$$C_{p_0} = \{x \in U,\ F(x) = F(p_0) \ \text{ et } \ \mathrm{d}F(x) \neq 0\},$$

et soit Γ_{p_0} la composante connexe de p_0 dans C_{p_0}. On note $\gamma : t \in I_X(p_0) \longmapsto \varphi_X^t(p_0) \in U$. Alors Γ_{p_0} est une courbe connexe $\mathcal{C}^{k+1}$ paramétrée par γ. Et :

(i) *Si Γ_{p_0} est compacte, alors γ est périodique.*

(ii) *Si Γ_{p_0} n'est pas compacte, alors γ est un $\mathcal{C}^{k+1}$-difféomorphisme de $I_X(p_0)$ sur Γ_{p_0}.*

8.4 Points réguliers et boîte de flot

Définition 8.4.1 (Point régulier et point singulier)**.** *Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien. Un point $p_0 \in U$ est dit* régulier *pour X lorsque $X(p_0) \neq 0$. Dans le cas contraire, on dit que p_0 est* singulier*.*

Théorème 8.4.2 (Théorème de la boîte de flot)**.** *Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geqslant 1$. Soit p_0 un point régulier de X. Soit H un hyperplan fermé de E ne contenant pas $X(p_0)$. Alors il existe un voisinage ouvert U de p_0 dans E, un voisinage ouvert V de 0 dans H et un $\varepsilon > 0$ t.q. l'application :*

$$\Phi_X : (t, x) \in \left]-\varepsilon, +\varepsilon\right[\times V \longmapsto \varphi_X^t(p_0 + x) \in U$$

est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de $\left]-\varepsilon, +\varepsilon\right[\times V$ sur U. On dit que Φ_X est une boîte de flot.

Remarque 8.4.3. *Le théorème de la boîte de flot dit que, dans un système de coordonnées locales de classe $\mathcal{C}^k$ convenable, X est constant.*

8.5 Stabilité et stabilité asymptotique

Définition 8.5.1 (Stabilité et stabilité asymptotique)**.** *Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien. Soit p_0 un point singulier de X.*

(i) *On dit que p_0 est* stable *lorsque pour tout voisinage V de p_0, il existe un voisinage W de p_0 t.q. $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \varphi_X^t(W) \subset V$.*

(ii) *On dit que p_0 est* asymptotiquement stable *lorsqu'il existe un voisinage W de p_0 t.q. $\varphi_X^t \xrightarrow[t\to+\infty]{} p_0$ uniformément sur W.*

(iii) *On dit que p_0 est* instable *si p_0 n'est pas stable.*

Proposition 8.5.2. *Un point singulier asymptotiquement stable est stable.*

Exemple 8.5.3. *On suppose que E est de dimension finie et que X est linéaire : $\forall x \in U,\ X(x) = Ax$ avec $A \in \mathcal{L}(E)$. Soit p_0 un point singulier de X. Alors :*

(i) *p_0 est stable* ssi $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \Re(\lambda) \leqslant 0$.

(ii) *p_0 est asymptotiquement stable* ssi $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \Re(\lambda) < 0$

Proposition 8.5.4. *On suppose que E est de dimension finie. Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien et soit p_0 un point singulier de X. On suppose qu'il existe une fonction de Liapounov faible F définie sur un voisinage V de p_0 et admettant un minimum strict en p_0. Alors :*

(i) *Le point p_0 est stable.*

(ii) *Si F est de Liapounov forte et si p_0 est isolé dans $\{x \in V,\ \mathrm{d}F(x) = 0\}$ (par exemple, si p_0 est non dégénéré comme point critique de F), alors p_0 est asymptotiquement stable.*

Corollaire 8.5.5. *On suppose que E est de dimension finie. Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien et soit p_0 un point singulier de X.*

(i) *Si $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\left(\mathrm{d}X\left(p_0\right)\right),\ \Re\left(\lambda\right) < 0$, alors p_0 est asymptotiquement stable.*

(ii) *Si $\exists \lambda \in \mathrm{Sp}\left(\mathrm{d}X\left(p_0\right)\right),\ \Re\left(\lambda\right) > 0$, alors p_0 est instable.*

8.6 Points singuliers

8.6.1 Cas général

Définition 8.6.1 (Point singulier générique)**.** *Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien. Un point singulier $p_0 \in U$ (i.e. vérifiant $X\left(p_0\right) = 0$) est dit* générique *lorsque $\mathrm{d}X\left(p_0\right)$ est inversible.*

Proposition 8.6.2. *Si un point singulier est générique, alors il est isolé (parmi les points singuliers).*

8.6.2 En dimension 2

Définition 8.6.3 (Nomenclature des points singuliers en dimension 2)**.** *On suppose que* $\dim E = 2$. *Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien. On se donne $p_0 \in U$ un point singulier générique de X.*

(i) *On dit que p_0 est un* nœud stable *lorsque* $\mathrm{Sp}\left(\mathrm{d}X\left(p_0\right)\right) \subset \mathbb{R}_-^*$.

(ii) *On dit que p_0 est un* nœud instable *lorsque* $\mathrm{Sp}\left(\mathrm{d}X\left(p_0\right)\right) \subset \mathbb{R}_+^*$.

(iii) *On dit que p_0 est un* nœud propre *lorsque p_0 est un nœud et* $\mathrm{d}X\left(p_0\right) \in \mathrm{Vect}\left(id_E\right)$. *Sinon, on dit que p_0 est un* nœud impropre.

(iv) *On dit que p_0 est un* foyer *lorsque* $\mathrm{Sp}\left(\mathrm{d}X\left(p_0\right)\right)$ *est de la forme $\{z, \overline{z}\}$ avec $z \in \mathbb{C}\setminus\left(\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}\right)$.*

(v) *On dit que p_0 est un* centre *lorsque* $\mathrm{Sp}\left(\mathrm{d}X\left(p_0\right)\right)$ *est de la forme $\{z, \overline{z}\}$ avec $z \in i\mathbb{R}$.*

(vi) *On dit que p_0 est un* col *ou une* selle *lorsque* $\mathrm{Sp}\left(\mathrm{d}X\left(p_0\right)\right)$ *est de la forme $\{a, b\}$ avec $a < 0 < b$.*

Références

[1] V.I. Arnold. *Équations différentielles ordinaires.*

[2] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.*

[3] M. Chaperon. *Calcul différentiel et calcul intégral – troisième année.*

[4] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles.*

[5] F. Laudenbach. *Calcul différentiel et intégral.*

[6] J. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint.*