# Groupe Fondamental et Revêtements

Cours de Mikael de la Salle
Notes de Alexis Marchand

ENS de Lyon
S2 2017-2018
Niveau L3

## Table des matières

# 1 Homotopie, chemins et groupe fondamental

## 1.1 Homotopie en général

**Définition 1.1.1** (Homotopie)**.** *Soit $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, $f_0, f_1 : X \to Y$ $\mathcal{C}^0$. On dit que $f_0$ est homotope à $f_1$ lorsqu'il existe une application continue $H : [0,1] \times X \to Y$ t.q.*

$$H(0, \cdot) = f_0 \qquad \text{et} \qquad H(1, \cdot) = f_1.$$

*Autrement dit, $f_0$ et $f_1$ sont homotopes si on peut déformer continûment $f_0$ en $f_1$.*

**Proposition 1.1.2.** *La relation "être homotope à" est d'équivalence.*

**Remarque 1.1.3.** *Soit $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, $B \subset Y$. Deux applications continues $f_0, f_1 : X \to B$ peuvent ne pas être homotopes (dans $B$) même si les applications $f_0, f_1 : X \to Y$ sont homotopes (dans $Y$).*

**Notation 1.1.4.** *Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :*

(i) $\mathbb{S}^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1},\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$,

(ii) $\mathbb{B}^{n+1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1},\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \leqslant 1 \right\}$.

**Exemple 1.1.5.**

(i) *L'application $f_0 : x \in \mathbb{S}^1 \longmapsto x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ n'est pas homotope à l'application $f_1 : x \in \mathbb{S}^1 \longmapsto (1,0) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ (sinon on aurait $1 = \mathrm{Ind}_{f_0}(0) = \mathrm{Ind}_{f_1}(0) = 0$). Par contre, l'application $g_0 : x \in \mathbb{S}^1 \longmapsto x \in \mathbb{R}^2$ est homotope à $g_1 : x \in \mathbb{S}^1 \longmapsto (1,0) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.*

(ii) *Soit $Y$ est une partie convexe d'un espace vectoriel topologique. Alors pour tout espace topologique $X$, et pour toutes applications continues $f_0, f_1 : X \to Y$, $f_0$ et $f_1$ sont homotopes* via $H : (t,x) \in [0,1] \times X \longmapsto (1-t) f_0(x) + t f_1(x)$.

(iii) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_0, f_1 : X \to \mathbb{S}^n$ t.q. $\forall x \in X,\ f_0(x) \neq -f_1(x)$. Alors $f_0$ et $f_1$ sont homotopes* via $H : (t,x) \in [0,1] \times X \longmapsto \frac{(1-t) f_0(x) + t f_1(x)}{\|(1-t) f_0(x) + t f_1(x)\|}$.

**Proposition 1.1.6.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. S'équivalent :*

(i) *$id_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ n'est pas homotope à une application constante $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$.*

(ii) *Il n'existe pas de rétraction de $\mathbb{B}^{n+1}$ sur $\mathbb{S}^n$ (i.e. il n'existe pas d'application $r : \mathbb{B}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ continue t.q. $r_{|\mathbb{S}^n} = id_{\mathbb{S}^n}$).*

(iii) *Toute application continue $f : \mathbb{B}^{n+1} \to \mathbb{B}^{n+1}$ admet un point fixe.*

**Théorème 1.1.7** (Théorème du point fixe de Brouwer)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}$, toute application continue $f : \mathbb{B}^{n+1} \to \mathbb{B}^{n+1}$ admet un point fixe.*

**Démonstration.** *Cas 1* : $n = 0$. C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. *Cas 2* : $n = 1$. On utilise la proposition 1.1.6. On a vu dans l'exemple 1.1.5 que $id_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ n'est pas homotope à une application constante. Comme $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, on en déduit que $id_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ n'est pas homotope à une application constante. *Cas 3* : $n \geqslant 2$. Admis. □

**Proposition 1.1.8.** *Soit $X$, $Y$ et $Z$ trois espaces topologiques, $f_0, f_1 : X \to Y$, $g_0, g_1 : Y \to Z$ des applications continues. Si $f_0$ et $f_1$ sont homotopes et $g_0$ et $g_1$ sont homotopes, alors $(g_0 \circ f_0)$ et $(g_1 \circ f_1)$ sont homotopes.*

**Proposition 1.1.9.** *Soit $X$, $Y_0$ et $Y_1$ trois espaces topologiques. Soit $f : Y_0 \to Y_1$ un homéomorphisme. On note $\mathcal{H}_0$ (resp. $\mathcal{H}_1$) l'ensemble des classes d'homotopie des applications continues $X \to Y_0$ (resp. $X \to Y_1$). Alors l'application $\left| \begin{array}{l} \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \\ [\varphi] \longmapsto [f \circ \varphi] \end{array} \right.$ est une bijection, où $[\varphi]$ désigne la classe d'homotopie de $\varphi$.*

## 1.2 Type d'homotopie

**Définition 1.2.1** (Type d'homotopie)**.** *On dit que deux espaces topologique $Y_0$ et $Y_1$ ont même* type d'homotopie *lorsqu'il existe des applications continues $f : Y_0 \to Y_1$ et $g : Y_1 \to Y_0$ t.q. $(f \circ g)$ est homotope à $id_{Y_1}$ et $(g \circ f)$ est homotope à $id_{Y_0}$.*

**Remarque 1.2.2.** *Deux espaces homéomorphes ont même type d'homotopie.*

**Proposition 1.2.3.** *La relation "avoir même type d'homotopie" est d'équivalence.*

**Vocabulaire 1.2.4.** *Un espace topologique est dit* contractile *s'il a le type d'homotopie d'un point.*

**Exemple 1.2.5.**

(i) *Une partie convexe d'un espace vectoriel topologique est contractile.*

(ii) $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ *et* $\mathbb{S}^n$ *ont même type d'homotopie.*

**Proposition 1.2.6.** *Soit $X$, $Y_0$ et $Y_1$ trois espaces topologiques. Supposons que $Y_0$ et $Y_1$ ont même type d'homotopie. On note $\mathcal{H}_0$ (resp. $\mathcal{H}_1$) l'ensemble des classes d'homotopie des applications continues $X \to Y_0$ (resp. $X \to Y_1$). Alors $\mathcal{H}_0$ est en bijection avec $\mathcal{H}_1$.*

**Exemple 1.2.7.** $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *n'ont pas même type d'homotopie.*

## 1.3 Homotopie relative, rétractions

**Définition 1.3.1** (Homotopie relative)**.** *Soit $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, $A \subset X$. Soit $f_0, f_1 : X \to Y$ deux applications continues t.q. $f_{0|A} = f_{1|A}$. On dit que $f_0$ et $f_1$ sont* homotopes relativement à $A$ *lorsqu'il existe une homotopie $H : [0,1] \times X \to Y$ t.q.*

$$\forall a \in A,\ \forall t \in [0,1],\ H(t,a) = f_0(a) = f_1(a).$$

**Proposition 1.3.2.** *La relation "être homotope relativement à une partie" est d'équivalence.*

**Remarque 1.3.3.** *La notion d'homotopie générale correspond à la notion d'homotopie relativement à $\varnothing$.*

**Remarque 1.3.4.** *Toutes les propriétés énoncées précédemment restent vraies pour la notion d'homotopie relative.*

**Définition 1.3.5** (Rétraction)**.** *Soit $X$ un espace topologique et $A \subset X$.*

(i) *On dit que $A$ est un* rétracté *de $X$ s'il existe une application continue $r : X \to A$, appelée* rétraction, *vérifiant $r_{|A} = id_A$.*

(ii) *On dit que $A$ est un* rétracté par déformation *de $X$ s'il existe une rétraction $r : X \to A$ t.q. $(i \circ r)$ est homotope à $id_X$ relativement à $A$, où $i : A \to X$ est l'inclusion.*

**Exemple 1.3.6.**

(i) *Soit $X$ un espace topologique et $x \in X$. Alors $\{x\}$ est un rétracté de $X$ (mais pas forcément par déformation).*

(ii) $\{0,1\}$ *n'est pas un rétracté de* $[0,1]$.

(iii) $\mathbb{S}^n$ *est un rétracté par déformation de* $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

(iv) *Si $X$ est un espace topologique, alors $X \times \{0\}$ est un rétracté par déformation de $X \times \mathbb{R}$, de $X \times [0,1]$, etc.*

**Proposition 1.3.7.** *Soit $X$ un espace topologique et $A$ un rétracté par déformation de $X$. Alors $A$ et $X$ ont même type d'homotopie.*

**Proposition 1.3.8.** *Soit $X$ un espace topologique, $A \subset B \subset X$. Si $A$ est un rétracté (resp. rétracté par déformation) de $B$ et $B$ est un rétracté (resp. rétracté par déformation) de $X$, alors $A$ est un rétracté (resp. rétracté par déformation) de $X$.*

## 1.4 Chemins

**Définition 1.4.1** (Chemin)**.** *On appelle* chemin *dans un espace topologique $X$ toute application continue $\gamma : [0,1] \to X$. On dit alors que $\gamma(0)$ est l'*origine *de $\gamma$, et $\gamma(1)$ est son* extrémité.

**Remarque 1.4.2.** *Avec la notion d'homotopie développée précédemment, tout chemin est homotope à un chemin constant. Les classes d'homotopie des chemins sont donc les composantes connexes par arcs.*

**Définition 1.4.3** (Homotopie de chemins)**.** *Soit $X$ un espace topologique. Deux chemins $\gamma_0$ et $\gamma_1$ dans $X$ sont dits* homotopes *(en tant que chemins) s'ils ont la même origine, la même extrémité, et s'ils sont homotopes relativement à $\{0,1\}$.*

**Proposition 1.4.4.** *La relation "être homotope à (en tant que chemins)" est d'équivalence.*

**Définition 1.4.5** (Concaténation de chemins)**.** *Soit $X$ un espace topologique. Soit $\gamma$ et $\delta$ deux chemins dans $X$ t.q. $\gamma(1) = \delta(0)$. On définit la* concaténation *de $\gamma$ et $\delta$ par :*

$$(\gamma\delta) : t \in [0,1] \longmapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \leqslant \frac{1}{2} \\ \delta(2t-1) & \text{si } t \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}.$$

**Définition 1.4.6** (Chemin inverse)**.** *Soit $X$ un espace topologique. Soit $\gamma$ un chemin dans $X$. On définit le* chemin inverse *de $\gamma$ par :*

$$\overline{\gamma} : t \in [0,1] \longmapsto \gamma(1-t).$$

**Proposition 1.4.7.** *Soit $X$ un espace topologique. Soit $\gamma_0, \gamma_1$ des chemins de $x$ à $y$ dans $X$, et $\delta_0, \delta_1$ des chemins de $y$ à $z$ dans $X$.*

(i) *Si $\gamma_0$ et $\gamma_1$ sont homotopes (sous-entendu : en tant que chemins), alors $\overline{\gamma_0}$ et $\overline{\gamma_1}$ sont homotopes.*

(ii) *Si $\gamma_0$ et $\gamma_1$ sont homotopes et $\delta_0$ et $\delta_1$ sont homotopes, alors $\gamma_0\delta_0$ et $\gamma_1\delta_1$ sont homotopes.*

**Notation 1.4.8.** *Soit $X$ un espace topologique. Pour $x \in X$, on note $c_x : t \in [0,1] \longmapsto x$ le chemin constant égal à $x$.*

**Proposition 1.4.9.** *Soit $X$ un espace topologique.*

(i) *Soit $\gamma, \delta, \epsilon$ des chemins dans $X$ t.q. $\gamma(1) = \delta(0)$ et $\delta(1) = \epsilon(0)$. Alors $\gamma(\delta\epsilon)$ et $(\gamma\delta)\epsilon$ sont homotopes.*

(ii) *Si $\gamma$ est un chemin de $x$ à $y$ dans $X$, alors $c_x\gamma$, $\gamma$ et $\gamma c_y$ sont homotopes.*

**Définition 1.4.10** (Concaténation de classes d'homotopie)**.** *Soit $X$ un espace topologique. Étant donné un chemin $\gamma$ de $x$ à $y$ dans $X$, on notera $[\gamma]$ ou $[\gamma]_x^y$ la classe d'homotopie (pour les chemins) de $\gamma$. On définit alors à bon droit la concaténation de classes d'homotopie en posant :*

$$[\gamma]_x^y[\delta]_y^z = [\gamma\delta]_x^z.$$

*Alors la concaténation est associative, admet $[c_x]_x^x$ comme neutre à gauche et $[c_y]_y^y$ comme neutre à droite. De plus, $[\overline{\gamma}]_y^x$ est l'inverse de $[\gamma]_x^y$. Ainsi, l'ensemble des classes d'homotopie de chemins est un groupoïde.*

## 1.5 Groupe fondamental

**Définition 1.5.1** (Groupe fondamental)**.** *Soit $X$ un espace topologique et $x \in X$. Le* groupe fondamental *de $X$ au point $x$, noté $\Pi_1(X,x)$, est par définition l'ensemble des classes d'homotopie des chemins de $x$ à $x$ dans $X$. C'est un groupe, muni de la concaténation de classes d'homotopie.*

**Vocabulaire 1.5.2.** *On appellera* espace pointé *la donnée de* $(X, x)$*, où* $X$ *est un espace topologique et* $x \in X$.

**Théorème 1.5.3.** *Soit* $X$ *un espace topologique,* $(x, y) \in X^2$*. On suppose qu'il existe un chemin* $c : [0, 1] \to X$ *allant de* $x$ *à* $y$ *dans* $X$*. Alors l'application :*

$$\varphi_c : \left| \begin{array}{rcl} \Pi_1(X, y) & \longrightarrow & \Pi_1(X, x) \\ [\gamma] & \longmapsto & [c\gamma\overline{c}] \end{array} \right.$$

*est un isomorphisme de groupes, et ne dépend que de la classe d'équivalence de* $c$.

**Remarque 1.5.4.** *Si deux points* $x$ *et* $y$ *sont dans la même composante connexe par arcs d'un espace topologique* $X$*, alors* $\Pi_1(X, x) \simeq \Pi_1(X, y)$*. Dans le cas où* $X$ *est connexe par arcs, on pourra donc parler de* $\Pi_1(X)$*, qui est bien défini à isomorphisme près.*

**Définition 1.5.5** (Espace simplement connexe)**.** *Un espace topologique* $X$ *connexe par arcs est dit* simplement connexe *lorsque* $\Pi_1(X) = \{1\}$.

**Exemple 1.5.6.** *Toute partie convexe d'un espace vectoriel topologique est simplement connexe.*

**Proposition 1.5.7.** *Soit* $X$ *un espace topologique connexe par arcs. Alors* $X$ *est simplement connexe* ssi *pour tous chemins* $\gamma, \delta$ *dans* $X$ *de même origine et de même extrémité,* $\gamma$ *est homotope à* $\delta$.

## 1.6 Applications continues et groupe fondamental

**Définition 1.6.1.** *Soit* $(X, x)$ *un espace pointé,* $Y$ *un espace topologique et* $f : X \to Y$ *une application continue. On associe à* $f$ *l'application :*

$$f_* : \left| \begin{array}{rcl} \Pi_1(X, x) & \longrightarrow & \Pi_1(Y, f(x)) \\ [\gamma] & \longmapsto & [f \circ \gamma] \end{array} \right. .$$

*Alors* $f_*$ *est un morphisme de groupes.*

**Proposition 1.6.2.** *Soit* $(X, x)$ *un espace pointé,* $Y, Z$ *deux espaces topologiques,* $f : X \to Y$ *et* $g : Y \to Z$ *deux applications continues. Alors :*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

*De plus,* $(id_X)_* = id_{\Pi_1(X,x)}$*. On dit que l'application* $f \longmapsto f_*$ *est un* foncteur covariant.

**Proposition 1.6.3.** *Soit* $X$ *et* $Y$ *deux espaces topologiques et* $\varphi : X \to Y$ *un homéomorphisme. Alors pour tout* $x \in X$*,* $\varphi_* : \Pi_1(X, x) \to \Pi_1(Y, f(x))$ *est un isomorphisme de groupes. Le groupe fondamental est donc un* invariant topologique.

**Proposition 1.6.4.** *Soit* $(X, x)$ *un espace pointé,* $Y$ *un espace topologique et* $f, g : X \to Y$ *deux applications continues.*

(i) *Si* $f$ *et* $g$ *sont homotopes relativement à* $\{x\}$*, alors* $f_* = g_*$.

(ii) *Si* $f$ *et* $g$ *sont homotopes, soit* $H : [0, 1] \times X \to Y$ *une homotopie de* $f$ *à* $g$*. Soit* $c : t \in [0, 1] \longmapsto H(x, t) \in X$ *(*$c$ *est un chemin de* $f(x)$ *à* $g(x)$*). Alors, avec la notation du théorème 1.5.3, on a* $f_* = \varphi_c \circ g_*$*, et* $\varphi_c : \Pi_1(Y, g(x)) \to \Pi_1(Y, f(x))$ *est un isomorphisme.*

**Théorème 1.6.5.** *Soit* $X$ *et* $Y$ *deux espaces topologiques connexes par arcs ayant même type d'homotopie. Alors* $\Pi_1(X) \simeq \Pi_1(Y)$.

**Démonstration.** Soit $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ deux applications continues t.q. $(f \circ g)$ est homotope à $id_Y$ et $(g \circ f)$ est homotope à $id_X$. On fixe $x \in X$. Avec la proposition 1.6.4, on en déduit que $(f_* \circ g_*)$ et $(g_* \circ f_*)$ sont des isomorphismes de groupes. Ainsi, $f_*$ et $g_*$ sont des isomorphismes de groupes. □

**Corollaire 1.6.6.** *Si* $X$ *est un espace topologique et* $A$ *est un rétracté par déformation de* $X$*, alors* $\forall a \in A$*,* $\Pi_1(A, a) \simeq \Pi_1(X, a)$.

**Proposition 1.6.7.** *Si* $X$ *est un espace topologique et* $A$ *est un rétracté de* $X$*, alors pour* $a \in A$*, si* $i : A \to X$ *est l'inclusion, le morphisme de groupes* $i_* : \Pi_1(A, a) \to \Pi_1(X, a)$ *est injectif.*

## 1.7 Produits d'espaces topologiques

**Proposition 1.7.1.** *Soit $(X_1, x_1)$ et $(X_2, x_2)$ deux espaces pointés. Alors :*

$$\Pi_1 (X_1 \times X_2, (x_1, x_2)) \simeq \Pi_1 (X_1, x_1) \times \Pi_1 (X_2, x_2).$$

# 2 Calculs de groupes fondamentaux

## 2.1 Le cercle

**Notation 2.1.1.** *On considère :*

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}.$$

*On introduit :*

$$p : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x \longmapsto \exp(2i\pi x) \end{array} \right. .$$

*$p$ est un* revêtement *de $\mathbb{S}^1$. En particulier, c'est un homéomorphisme local : il existe un $\varepsilon > 0$ et un $\eta > 0$ t.q. pour tous $x_0 \in \mathbb{R}$ et $z_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$, il existe $\vartheta_{z_0,x_0} : B_{\mathbb{S}^1}(z_0, \varepsilon) \to ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ t.q. $p \circ \vartheta_{z_0,x_0} = id_{B_{\mathbb{S}^1}(z_0,\varepsilon)}$.*

**Proposition 2.1.2** (Relèvement de chemins)**.** *Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ un chemin avec $\gamma(0) = 1$. Alors il existe un unique chemin $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}$ t.q. $\gamma = p \circ \widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\gamma}(0) = 0$.*

**Démonstration.** *Existence.* $\gamma$ est continue sur le compact $[0,1]$, donc uniformément continue selon le théorème de Heine. Donc il existe un $\alpha > 0$ t.q.

$$\forall (x, y) \in [0,1]^2,\ |x - y| \leqslant \alpha \Longrightarrow |\gamma(x) - \gamma(y)| < \varepsilon.$$

On se donne alors $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ t.q. $\forall i \in \{1, \ldots, k\},\ |t_{i-1} - t_i| \leqslant \alpha$. On définit alors par récurrence $\widetilde{\gamma}_{|[0,t_i]}$ : on pose $\widetilde{\gamma}_{|[0,t_1]} = \vartheta_{1,0} \circ \gamma_{|[0,t_1]}$, puis $\widetilde{\gamma}_{|[t_1,t_2]} = \vartheta_{\gamma(t_1),\widetilde{\gamma}(t_1)} \circ \gamma_{|[t_1,t_2]}$, etc. *Unicité.* Si $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}_2$ sont deux relèvements, alors $p \circ (\widetilde{\gamma}_1 - \widetilde{\gamma}_2) = 0$, donc $(\widetilde{\gamma}_1 - \widetilde{\gamma}_2)([0,1]) \subset \operatorname{Ker} p = \mathbb{Z}$. Par connexité de $[0,1]$, $(\widetilde{\gamma}_1 - \widetilde{\gamma}_2)$ est constante ; et $(\widetilde{\gamma}_1 - \widetilde{\gamma}_2)(0) = 0$, donc $\widetilde{\gamma}_1 = \widetilde{\gamma}_2$. □

**Définition 2.1.3** (Degré d'un lacet)**.** *Soit $\gamma$ un lacet dans $\mathbb{S}^1$ de point de base $1$. Soit $\widetilde{\gamma}$ le relèvement de $\gamma$. On définit alors le* degré *de $\gamma$ par :*

$$\deg \gamma = \widetilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}.$$

*Intuitivement, le degré compte le nombre de tours (avec un signe) effectués autour du cercle lorsqu'on parcourt $\gamma$.*

**Lemme 2.1.4.** *Soit $\gamma_0$ et $\gamma_1$ deux lacets dans $\mathbb{S}^1$ de point de base $1$. On suppose que :*

$$\forall t \in [0,1],\ \gamma_0(t) \neq -\gamma_1(t)$$

*(ceci est vérifié en particulier dès que $\|\gamma_0 - \gamma_1\|_\infty < 2$). Alors $\deg \gamma_0 = \deg \gamma_1$.*

**Corollaire 2.1.5.** *Deux lacets de point de base $1$ homotopes dans $\mathbb{S}^1$ ont le même degré.*

**Lemme 2.1.6.** *Si $\gamma$ et $\delta$ sont deux lacets dans $\mathbb{S}^1$ de point de base $1$, alors :*

$$\deg(\gamma\delta) = \deg \gamma + \deg \delta.$$

**Théorème 2.1.7.** $\Pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$.

**Démonstration.** On a $\Pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \Pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$. On pose :

$$\Phi : \left| \begin{array}{rcl} \Pi_1\left(\mathbb{S}^1, 1\right) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ [\gamma] & \longmapsto & \deg \gamma \end{array} \right. .$$

$\Phi$ est bien définie selon le corollaire 2.1.5, et c'est un morphisme de groupes selon le lemme 2.1.6. Reste à montrer que $\Phi$ est bijectif. *Injectivité.* Soit $[\gamma] \in \operatorname{Ker} \Phi$, soit $\tilde{\gamma}$ le relèvement de $\gamma$. On a $\tilde{\gamma}(1) = \Phi([\gamma]) = 0$, donc $\tilde{\gamma}$ est un lacet dans $\mathbb{R}$ de point de base 0. Comme $\mathbb{R}$ est simplement connexe, il existe une homotopie $H : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ allant de $\tilde{\gamma}$ au lacet constant 0. Ainsi, $p \circ H$ est une homotopie allant de $\gamma$ au lacet constant 1. Donc $[\gamma] = 1$. *Surjectivité.* Pour $k \in \mathbb{Z}$, si on pose $\gamma : t \in [0,1] \longmapsto \exp(2i\pi kt)$, alors on a $k = \deg \gamma = \Phi([\gamma])$. □

## 2.2 Les tores

**Notation 2.2.1.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère :*

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n.$$

**Proposition 2.2.2.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{T}^n \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n \simeq (\mathbb{S}^1)^n$.*

**Corollaire 2.2.3.** *$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Pi_1(\mathbb{T}^n) \simeq \mathbb{Z}^n$.*

## 2.3 Les sphères

**Notation 2.3.1.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère :*

$$\mathbb{S}^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1},\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}.$$

**Lemme 2.3.2.** *Soit $n \geqslant 2$. Alors tout lacet sur $\mathbb{S}^n$ est homotope à un lacet évitant un point (indépendant du lacet choisi).*

**Démonstration.** On note $N = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ et $S = (0, \ldots, 0, -1) \in \mathbb{S}^n$. On va montrer que tout lacet de point de base $S$ est homotope à un lacet évitant $N$. Pour cela, on se donne un tel lacet ; on se donne un nombre fini d'intervalles sur lesquels le lacet passe dans l'hémisphère nord (i.e. $\{x \in \mathbb{S}^n,\ x_{n+1} \geqslant 0\}$), et on remplace les morceaux de lacet sur ces intervalles par un chemin sur l'équateur (i.e. $\{x \in \mathbb{S}^n,\ x_{n+1} = 0\}$). On vérifie que le lacet ainsi construit est homotope au lacet initial et on en déduit le résultat. □

**Théorème 2.3.3.** *Pour $n \geqslant 2$, $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe.*

**Corollaire 2.3.4.** *Pour $n > 2$, $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.*

**Démonstration.** Soit par l'absurde $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme. Notons que $\mathbb{S}^1$ a même type d'homotopie que $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ (c'en est un rétracté par déformation) ; de même, $\mathbb{S}^{n-1}$ a même type d'homotopie que $\mathbb{R}^n \backslash \{\varphi(0)\}$. Il vient :

$$\Pi_1\left(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}\right) \simeq \Pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) \simeq \mathbb{Z} \not\simeq \{1\} \simeq \Pi_1\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) \simeq \Pi_1\left(\mathbb{R}^n \backslash \{\varphi(0)\}\right).$$

C'est absurde car $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ et $\mathbb{R}^n \backslash \{\varphi(0)\}$ sont homéomorphes. □

**Remarque 2.3.5.** *Le groupe fondamental permet de distinguer $\mathbb{R}^2$ de $\mathbb{R}^n$ (pour $n > 2$) mais pas $\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^m$ en général. Pour cela, on introduit des* groupes d'homotopie supérieurs *: pour $p \in \mathbb{N}^*$, $X$ un espace topologique, $x \in X$, on définit $\Pi_p(X, x)$ comme l'ensemble des classes d'homotopie, relativement à un point $\omega \in \mathbb{S}^p$, d'applications $\mathbb{S}^p \to X$ envoyant $\omega$ sur $x$. Si $p = 1$, on retrouve le groupe fondamental. On montre alors que $\Pi_p(\mathbb{S}^p, x)$ est non trivial pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{S}^p$ et que $\Pi_p(\mathbb{S}^q, x)$ est trivial dès que $q > p$.*

## 2.4 Les bouquets de cercles

**Définition 2.4.1** (Bouquet de cercle)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $X_n = \{1, \dots, n\} \times \mathbb{S}^1$, et on munit $X_n$ de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $(k,x)\mathcal{R}(\ell,y) \iff [(k,x) = (\ell,y) \text{ ou } x = y = 1]$. On définit alors le* bouquet de $n$ cercles *par :*

$$\mathfrak{B}_n = X_n/\mathcal{R},$$

*et on munit $\mathfrak{B}_n$ de la topologie quotient.*

**Théorème 2.4.2.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Pi_1(\mathfrak{B}_n)$ est le groupe libre $\mathbb{F}_n$ à $n$ générateurs. En particulier, $\Pi_1(\mathfrak{B}_n)$ est non abélien dès que $n \geqslant 2$.*

## 2.5 Théorème de van Kampen

**Définition 2.5.1** (Produit libre)**.** *Soit $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ deux groupes. Alors il existe un unique groupe (à isomorphisme près), appelé* produit libre *de $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ et noté $\Gamma_1 * \Gamma_2$, vérifiant :*

(i) *$\Gamma_1 * \Gamma_2$ contient des copies de $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ comme sous-groupes ; on identifie ces copies à $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$.*

(ii) *$\Gamma_1 * \Gamma_2$ est engendré par $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.*

(iii) *Pour tout groupe $\Lambda$ et pour tous morphismes de groupes $\varphi_1 : \Gamma_1 \to \Lambda$ et $\varphi_2 : \Gamma_2 \to \Lambda$, il existe un (unique) morphisme de groupes $\varphi : \Gamma_1 * \Gamma_2 \to \Lambda$ prolongeant $\varphi_1$ et $\varphi_2$.*

**Remarque 2.5.2.** *Soit $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ deux groupes. Alors, en considérant $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ comme sous-groupes de $\Gamma_1 * \Gamma_2$, on a $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{1\}$.*

**Exemple 2.5.3.** *Le groupe libre à deux générateurs est donné par $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.*

**Théorème 2.5.4** (Théorème de van Kampen, version ouverte)**.** *Soit $X$ un espace topologique connexe par arcs. Soit $U_1$ et $U_2$ des ouverts non vides de $X$ recouvrant $X$, connexes par arcs, et d'intersection connexe par arcs. On note $i_k : U_1 \cap U_2 \to U_k$ et $j_k : U_k \to X$ les injections canoniques, pour $k \in \{1,2\}$, de telle sorte qu'on a le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} & U_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\ U_1 \cap U_2 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & X \\ & U_2 \arrow[ur, "j_2"'] & \end{tikzcd}$$

*On se donne $x \in U_1 \cap U_2$. Alors :*

(i) *Les morphismes ${j_1}_* : \Pi_1(U_1, x) \to \Pi_1(X, x)$ et ${j_2}_* : \Pi_1(U_2, x) \to \Pi_1(X, x)$ induisent un unique morphisme :*

$$f : \Pi_1(U_1, x) * \Pi_1(U_2, x) \longrightarrow \Pi_1(X, x),$$

*et ce morphisme est surjectif.*

(ii) $\operatorname{Ker} f$ *est le sous-groupe distingué de $\Pi_1(U_1, x) * \Pi_1(U_2, x)$ engendré par l'ensemble suivant :*

$$\left\{ i_{1*}(g) i_{2*}(g)^{-1},\ g \in \Pi_1(U_1 \cap U_2, x) \right\}.$$

*Ainsi, $\Pi_1(X, x)$ est isomorphe au produit libre de $\Pi_1(U_1, x)$ est de $\Pi_1(U_2, x)$ amalgamé au-dessus de $\Pi_1(U_1 \cap U_2, x)$.*

# 3 Revêtements

## 3.1 Définition et exemples

**Définition 3.1.1** (Revêtement)**.** *Soit $B$ un espace topologique. Un* revêtement *de $B$ est la donnée d'un espace topologique $E$ et d'une application continue $p : E \to B$ t.q. tout $b \in B$ admet un voisinage $V$ dans $B$, un espace topologique discret $F \neq \varnothing$ et un homéomorphisme $\phi : p^{-1}(V) \to V \times F$ qui fasse commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(V) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & V \times F \arrow[dl, "\pi"] \\ V & \end{tikzcd}$$

*où $\pi : V \times F \to V$ est la projection. On dit alors que $B$ est la* base, *$E$ l'*espace total, *$p$ la* projection, *$F$ la* fibre en $b$ *et $\phi$ la* trivialisation locale en $b$. *Pour $f \in F$, on dit que $\phi^{-1}(V \times \{f\})$ est un* feuillet.

**Exemple 3.1.2.**

(i) *Si $B$ est un espace topologique et $F$ un espace discret, alors $p : (b, f) \in B \times F \longmapsto b \in B$ est un revêtement de fibre $F$.*

(ii) *L'application $p : t \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(2i\pi t) \in \mathbb{S}^1$ est un revêtement de fibre $\mathbb{Z}$.*

(iii) *L'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un revêtement de fibre $\mathbb{Z}$.*

**Définition 3.1.3** (Section locale)**.** *Si $E$ et $B$ sont des espaces topologiques et $p : E \to B$ est une application continue, on appelle* section locale *de $p$ au-dessus d'un ouvert $V \subset B$ toute application continue $s : V \to E$ t.q. $p \circ s = id_V$.*

**Proposition 3.1.4.** *Soit $E$ et $B$ deux espaces topologiques. Alors une application continue $p : E \to B$ est un revêtement* ssi *tout $b \in B$ admet un voisinage ouvert $V$ et un ensemble non vide $F$ t.q. tout $f \in F$ admet une section locale pour $p$ au-dessus de $V$ t.q. les $(s_f(V))_{f \in F}$ sont des ouverts deux à deux disjoints de $E$ qui recouvrent $p^{-1}(V)$.*

**Exemple 3.1.5.**

(i) *L'application $p : z \in \mathbb{S}^1 \longmapsto z^k \in \mathbb{S}^1$ est un revêtement de fibre $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.*

(ii) *L'application $p : z \in \mathbb{C} \longmapsto z^k \in \mathbb{C}$ n'est pas un revêtement.*

(iii) *L'application $p : z \in \mathbb{R}^n \longmapsto [z] \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est un revêtement de fibre $\mathbb{Z}^n$.*

(iv) *L'application $p : z \in \mathbb{S}^n \longmapsto \mathrm{Vect}(z) \in \mathbb{P}^n$ est un revêtement de fibre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

## 3.2 Propriétés des revêtements

**Proposition 3.2.1.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$.*

(i) *$p$ est surjectif.*

(ii) *Si $E$ est compact (resp. connexe, connexe par arcs), alors $B$ est compact (resp. connexe, connexe par arcs).*

(iii) *Pour $b \in B$, $p^{-1}(\{b\})$ est une partie discrète de $E$.*

(iv) *L'application $b \longmapsto |p^{-1}(\{b\})|$ est localement constante (donc constante si $B$ est connexe).*

(v) *Si $A \subset B$, alors $p_{|p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ est un revêtement de $A$.*

(vi) *On suppose $B$ compact. Alors $E$ est compact* ssi *les fibres sont finies.*

## 3.3 Morphismes de revêtements

**Définition 3.3.1** (Morphisme de revêtements)**.** *Soit $B$ un espace topologique, $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ des revêtements de $B$. On appelle* morphisme de revêtements *de $E$ vers $E'$ tout couple d'applications continues $(G, g) \in {E'}^E \times B^B$ t.q. le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{G} & E' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow[g]{} & B \end{array}$$

**Définition 3.3.2** (Automorphisme de revêtement)**.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$. Un* automorphisme de revêtement *est un homéomorphisme $G : E \to E$ t.q. $(G, id_B)$ est un morphisme de revêtements (autrement dit, $p \circ G = p$). On note $\operatorname{Aut}(E, p)$ le groupe des automorphismes du revêtement $p : E \to B$.*

**Exemple 3.3.3.** *Soit $B$ un espace connexe, $F$ un espace discret. On considère le revêtement trivial $p : B \times F \to B$. Alors :*

$$\operatorname{Aut}(B \times F, p) \simeq \mathfrak{S}_F,$$

*où $\mathfrak{S}_F$ est le groupe des permutations de $F$.*

**Proposition 3.3.4.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$.*

(i) $\operatorname{Aut}(E, p)$ *agit continûment sur $E$.*

(ii) *Pour tout $b \in B$, $\operatorname{Aut}(E, p)$ agit par permutation sur $p^{-1}(\{b\})$.*

## 3.4 Actions de groupes et revêtements

**Définition 3.4.1** (Action libre)**.** *Soit $G$ un groupe agissant sur un ensemble $E$. On dit que l'action de $G$ est* libre *lorsque :*

$$\forall g \in G \backslash \{e\},\ \forall x \in E,\ g \cdot x \neq x.$$

**Définition 3.4.2** (Action continue, propre, proprement discontinue)**.** *Soit $G$ un groupe topologique agissant sur un espace topologique $E$.*

(i) *On dit que l'action de $G$ est* continue *lorsque l'application* $\left| \begin{array}{l} G \times E \longrightarrow E \\ (g, x) \longmapsto g \cdot x \end{array} \right.$ *est continue. Lorsque $G$ est discret, cela revient à dire que $G$ agit par homéomorphisme.*

(ii) *On dit que l'action de $G$ est* propre *lorsque l'ensemble $\{g \in G,\ gK \cap K \neq \varnothing\}$ est relativement compact pour tout compact $K \subset E$. Lorsque $G$ est discret, cela revient à dire que cet ensemble est fini pour tout $K$.*

(iii) *On dit que l'action de $G$ est* proprement discontinue *lorsque tout point $x \in E$ admet un voisinage $W$ t.q. $\forall g \in G \backslash \{e\},\ gW \cap W = \varnothing$.*

**Remarque 3.4.3.** *Soit $G$ un groupe discret agissant continûment sur un espace topologique $E$.*

(i) *Si l'action de $G$ est libre, alors elle est fidèle.*

(ii) *Si l'action de $G$ est proprement discontinue, alors elle est libre.*

(iii) *Si $E$ est localement compact, et si l'action de $G$ est propre et libre, alors elle est proprement discontinue.*

**Notation 3.4.4.** *Si $G$ est un groupe topologique agissant sur un espace topologique $E$, on note $E/G = \{G \cdot x,\ x \in E\}$ l'ensemble des orbites de l'action de $G$ sur $E$, qu'on munit de la topologie quotient.*

**Théorème 3.4.5.** *Soit $G$ un groupe discret agissant continûment, librement et proprement sur un espace topologique connexe et localement compact $E$. Alors la projection canonique $p : E \to E/G$ est un revêtement de fibre $G$, et :*

$$\mathrm{Aut}(E,p) \simeq G.$$

**Démonstration.** *Étape 1* : $p$ est un revêtement de fibre $G$. Soit $x \in E$. Selon la remarque 3.4.3, l'action de $G$ est proprement discontinue, donc $x$ admet un voisinage $W$ dans $E$ t.q. $\forall g \in G \backslash \{e\}, gW \cap W = \varnothing$. Quitte à remplacer $W$ par $\mathring{W}$, on suppose $W$ ouvert. Alors $\bigcup_{g \in G} gW$ est une réunion disjointe d'ouverts homéomorphe à $W \times G$. Ainsi, si $W' = p(W)$, alors $W'$ est un voisinage ouvert de $p(x)$, qui est homéomorphe à $W$ (car $p_{|W}$ est injective), et on a une trivialisation locale donnée par :

$$\left| \begin{array}{l} W \times G \longrightarrow p^{-1}(W') \\ \quad (y,g) \longmapsto g \cdot y \end{array} \right. .$$

*Étape 2* : $\mathrm{Aut}(E,p) \simeq G$. Posons :

$$\Psi : \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathrm{Aut}(E,p) \\ \ g \longmapsto (x \mapsto g \cdot x) \end{array} \right. .$$

$\Psi$ est un morphisme de groupes, et $\Psi$ est injectif car l'action de $G$ est libre donc fidèle. Soit maintenant $\varphi \in \mathrm{Aut}(E,p)$. Soit $x_0 \in E$. Comme $p \circ \varphi(x_0) = p(x_0)$, il existe un $g \in G$ t.q. $\varphi(x_0) = g \cdot x_0$. On considère alors $H = \{x \in E,\ \varphi(x) = g \cdot x\}$. On montre que $H$ est un ouvert fermé de $E$. Or $E$ est connexe, et $x_0 \in H$, donc $H = E$. Donc $\varphi = \Psi(g)$, et $\Psi$ est un isomorphisme de groupes. $\square$

## 3.5 Relèvements

**Définition 3.5.1** (Relèvement)**.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$. Si $h : X \to B$ est une application continue, on appelle* relèvement *de $h$ sur $E$ toute application continue $\widetilde{h} : X \to E$ faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\widetilde{h}"] \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

**Exemple 3.5.2.** *$id_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ n'admet pas de relèvement sur $\mathbb{R}$.*

**Lemme 3.5.3.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$. Soit $h : X \to B$ une application continue. Si $X$ est connexe, alors deux relèvements de $h$ sur $E$ qui coïncident en un point de $X$ sont égaux.*

**Démonstration.** Soit $\widetilde{h}_1$ et $\widetilde{h}_2$ deux relèvements de $h$. On considère $\left\{x \in X,\ \widetilde{h}_1(x) = \widetilde{h}_2(x)\right\}$. On montre que cet ensemble est un ouvert fermé non vide de $X$, donc égal à $X$ par connexité. $\square$

**Lemme 3.5.4.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$. Soit $h : [0,1]^2 \to B$ une application continue. Alors pour tout $x_0 \in p^{-1}(\{h(0,0)\})$, $h$ admet un unique relèvement $\widetilde{h}$ sur $E$ t.q. $\widetilde{h}(0,0) = x_0$.*

**Démonstration.** La démonstration est similaire à celle de la proposition 2.1.2. $\square$

**Corollaire 3.5.5.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$. Soit $h : [0,1] \to B$ une application continue. Alors pour tout $x_0 \in p^{-1}(\{h(0)\})$, $h$ admet un unique relèvement $\widetilde{h}$ sur $E$ t.q. $\widetilde{h}(0) = x_0$.*

**Corollaire 3.5.6.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$. Si $\gamma_0$ et $\gamma_1$ sont deux lacets homotopes (en tant que chemins) dans $B$ et si $x_0 \in p^{-1}(\{\gamma_0(0)\})$, alors les relèvements respectifs $\widetilde{\gamma}_0$ et $\widetilde{\gamma}_1$ de $\gamma_0$ et $\gamma_1$ vérifiant $\widetilde{\gamma}_0(0) = \widetilde{\gamma}_1(0) = x_0$ sont homotopes (en tant que chemins) dans $E$. En particulier, $\widetilde{\gamma}_0(1) = \widetilde{\gamma}_1(1)$.*

**Remarque 3.5.7.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$. Si $\gamma$ est un chemin dans $B$ entre deux points $b_0$ et $b_1$, alors $\gamma$ induit une bijection de $p^{-1}(\{b_0\})$ sur $p^{-1}(\{b_1\})$. Autrement dit, le groupoïde fondamental agit sur $E$.*

## 3.6 Revêtements galoisiens

**Proposition 3.6.1.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$, avec $E$ connexe. Alors $\mathrm{Aut}(E, p)$ agit continûment et proprement discontinûment (donc librement) sur $E$.*

**Corollaire 3.6.2.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$, avec $E$ connexe. Alors la projection $E \to E/\mathrm{Aut}(E, p)$ est un revêtement.*

**Définition 3.6.3** (Revêtement galoisien)**.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$, avec $E$ connexe. S'équivalent :*

(i) *La projection $E \to E/\mathrm{Aut}(E, p)$ est isomorphe (en tant que revêtement) à $p : E \to B$.*

(ii) $\mathrm{Aut}(E, p)$ *agit transitivement sur les fibres.*

*Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que $p$ est un* revêtement galoisien*.*

# 4 Lien entre groupe fondamental et revêtements

## 4.1 Groupe fondamental de la base et groupe fondamental de l'espace total

**Remarque 4.1.1.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$. Alors pour tout $x \in E$, on a un morphisme de groupes $p_* : \Pi_1(E, x) \to \Pi_1(B, p(x))$.*

**Lemme 4.1.2.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$, soit $x \in E$. Alors le morphisme de groupes $p_* : \Pi_1(E, x) \to \Pi_1(B, p(x))$ est injectif :*

$$\Pi_1(E, x) \hookrightarrow \Pi_1(B, p(x)).$$

**Démonstration.** Cela vient du fait qu'on peut relever les homotopies (selon le corollaire 3.5.6). □

**Proposition 4.1.3.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$, avec $E$ connexe par arcs. S'équivalent :*

(i) *$E$ est simplement connexe.*

(ii) *Deux lacets dans $B$ sont homotopes* ssi *leurs relevés de même origine ont même extrémité.*

**Remarque 4.1.4.** *Il est toujours vrai que si deux lacets dans la base sont homotopes, alors leurs relevés de même origine ont même extrémité.*

**Corollaire 4.1.5.** *Soit $G$ un groupe discret agissant continûment, librement et proprement sur un espace topologique simplement connexe et localement compact $E$. Alors :*

$$\forall b \in E/G,\ \Pi_1(E/G, b) \simeq G.$$

## 4.2 Groupe fondamental et relèvements

**Théorème 4.2.1.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$. Soit $X$ un espace topologique connexe localement connexe par arcs, $h : X \to B$ une application continue, et $\omega_0 \in X$, $x_0 \in p^{-1}\left(\{h(\omega_0)\}\right)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$h$ admet un relèvement $\widetilde{h} : X \to E$ avec $\widetilde{h}(\omega_0) = x_0$.*

(ii) *$h_*\Pi_1(X, \omega_0) \subset p_*\Pi_1(E, x_0)$.*

**Démonstration.** ($\Rightarrow$) Clair. ($\Leftarrow$) Soit $\omega \in X$. Soit $\gamma : [0,1] \to X$ un chemin de $\omega_0$ à $\omega$ (car $X$ est connexe par arcs). D'après le corollaire 3.5.5, $h \circ \gamma$ admet un unique relèvement $\widetilde{h \circ \gamma}$ sur $E$. Montrons que $\widetilde{h \circ \gamma}(1)$ ne dépend pas de $\gamma$ mais seulement de $\omega$. Soit pour cela $\gamma'$ un autre chemin de $\omega_0$ à $\omega$. Alors :

$$\left[h \circ \left(\gamma\overline{\gamma'}\right)\right] \in h_*\Pi_1(X, \omega_0) \subset p_*\Pi_1(E, x_0).$$

Il existe donc un lacet $\delta$ dans $E$ de base $x_0$ t.q. $h \circ \left(\gamma\overline{\gamma'}\right)$ est homotope à $p \circ \delta$. Cela implique que l'unique relevé de $h \circ \left(\gamma\overline{\gamma'}\right) = (h \circ \gamma)\,\overline{(h \circ \gamma')}$ d'origine $x_0$ est un lacet. On en déduit que $\widetilde{h \circ \gamma}(1) = \widetilde{h \circ \gamma'}(1)$. Ainsi, $\widetilde{h \circ \gamma}(1)$ ne dépend que de $\omega$ ; on le note $\widetilde{h}(\omega)$. On a bien $p \circ \widetilde{h} = h$, $\widetilde{h}(\omega_0) = x_0$. Et $\widetilde{h}$ est continu par locale connexité par arcs de $X$. □

**Remarque 4.2.2.** *En cas d'existence du relèvement, on a unicité selon le lemme 3.5.3.*

**Corollaire 4.2.3.** *Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$. S'équivalent :*

(i) *Il existe une détermination continue du logarithme sur $\Omega$.*

(ii) *Tout lacet dans $\Omega$ est homotope à une constante dans $\mathbb{C}^*$.*

**Corollaire 4.2.4.** *Tout revêtement d'un espace simplement connexe est trivial.*

## 4.3 Opérations du groupe fondamental et revêtements

**Définition 4.3.1** (Action du groupe fondamental sur les fibres)**.** *Soit $B$ un espace topologique connexe par arcs et $p : E \to B$ un revêtement de $B$. Pour $b_0 \in B$, on définit une action de $\Pi_1(B, b_0)$ sur $p^{-1}(\{b_0\})$, en posant :*

$$\forall [\gamma] \in \Pi_1(B, b_0),\ \forall x \in p^{-1}(\{b_0\}),\ [\gamma] \cdot x = \widetilde{\gamma_x}(0),$$

*où $\widetilde{\gamma_x}$ est l'unique relèvement de $\gamma$ vérifiant $\widetilde{\gamma_x}(1) = x$.*

**Proposition 4.3.2.** *Soit $B$ un espace topologique connexe par arcs et $p : E \to B$ un revêtement de $B$. Soit $b_0 \in B$. On considère l'action de $\Pi_1(B, b_0)$ sur $p^{-1}(\{b_0\})$.*

(i) *Le stabilisateur de $x \in p^{-1}(\{b_0\})$ est $p_*\Pi_1(E, x)$.*

(ii) *L'action est transitive* ssi *$E$ est connexe par arcs.*

## 4.4 Revêtements galoisiens et sous-groupes du groupe fondamental

**Théorème 4.4.1.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$, avec $E$ connexe localement connexe par arcs. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$p$ est galoisien.*

(ii) *Pour tout $b \in B$ et pour tout $x \in p^{-1}(\{b\})$, $p_*\Pi_1(E, x)$ est distingué dans $\Pi_1(B, b)$.*

*Si tel est le cas, alors pour $b \in B$ et $x \in p^{-1}(\{b\})$ :*

$$\mathrm{Aut}(E, p) \simeq \Pi_1(B, b)/p_*\Pi_1(E, x).$$

**Démonstration.** (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $[\gamma] \in \Pi_1(E,x)$ et $[\beta] \in \Pi_1(B,b)$. On relève $\beta$ en un chemin $\widetilde{\beta}$ d'un certain $y \in p^{-1}(\{b\})$ à $x$. Alors $\widetilde{\beta}\gamma\overline{\widetilde{\beta}}$ est un lacet de base $y$ dans $E$. Comme $p$ est galoisien, il existe $\varphi \in \mathrm{Aut}(E,p)$ t.q. $\varphi(y) = x$. Ainsi, $\varphi \circ \left(\widetilde{\beta}\gamma\overline{\widetilde{\beta}}\right)$ est un lacet de base $x$ dans $E$. Et :

$$[\beta]\,(p_*[\gamma])\,[\beta]^{-1} = \left[\beta\,(p \circ \gamma)\,\overline{\beta}\right] = \left[p \circ \left(\widetilde{\beta}\gamma\overline{\widetilde{\beta}}\right)\right] = \left[p \circ \varphi \circ \left(\widetilde{\beta}\gamma\overline{\widetilde{\beta}}\right)\right] = p_*\left[\varphi \circ \left(\widetilde{\beta}\gamma\overline{\widetilde{\beta}}\right)\right] \in p_*\Pi_1(E,x).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $(x,y) \in p^{-1}(\{b\})^2$. On cherche à construire $\varphi \in \mathrm{Aut}(E,p)$ t.q. $\varphi(x) = y$. D'après le théorème 4.2.1, il suffit de prouver que $p_*\Pi_1(E,x) \subset p_*\Pi_1(E,y)$ (car on pourra alors relever $p : E \to B$, et ce de manière unique). Pour cela, soit $\gamma$ un chemin de $x$ à $y$ dans $E$ (car $E$ est connexe par arcs). Alors :

$$p_*\Pi_1(E,x) = [p \circ \gamma]\,p_*\Pi_1(E,y)\,[p \circ \gamma]^{-1} \subset p_*\Pi_1(E,y).$$

L'isomorphisme $\mathrm{Aut}(E,p) \simeq \Pi_1(B,b)/p_*\Pi_1(E,x)$ vient alors du fait que $p_*\Pi_1(E,x)$ est le stabilisateur de $x$ pour l'action de $\Pi_1(B,b)$ sur $p^{-1}(\{b\})$. Ici, l'action est transitive (car $E$ est connexe par arcs), donc $\Pi_1(B,b)/p_*\Pi_1(E,x)$ est en bijection avec $p^{-1}(\{b\})$, qui est lui-même en bijection avec $\mathrm{Aut}(E,p)$ (vu la démonstration de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i)). On a une bijection, on montre alors que c'est un morphisme de groupes. □

**Corollaire 4.4.2.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$, avec $E$ connexe localement connexe par arcs. Si $E$ est simplement connexe, alors le revêtement $p$ est galoisien, et :*

$$\mathrm{Aut}(E,p) \simeq \Pi_1(B,b).$$

## 4.5 Revêtements universels

**Définition 4.5.1** (Revêtement universel)**.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement de $B$. On dit que $p$ est un* revêtement universel *lorsque :*

(i) *$p$ est galoisien.*

(ii) *Pour tout revêtement $p_1 : E_1 \to B$, il existe un morphisme de revêtements $f : E \to E_1$ t.q. $p_1 \circ f = p$.*

**Lemme 4.5.2.** *Soit $B$ un espace topologique et $p : E \to B$ un revêtement universel de $B$. Si $p_1 : E_1 \to B$ est un revêtement de $B$ et $f : E \to E_1$ un morphisme de revêtements t.q. $p_1 \circ f = p$, alors $f$ est un revêtement de $E_1$.*

**Proposition 4.5.3.** *Deux revêtements universels d'un même espace de base sont isomorphes.*

**Théorème 4.5.4.** *Soit $B$ un espace topologique. Soit $E$ un espace topologique simplement connexe et localement connexe par arcs. Alors tout revêtement $p : E \to B$ est universel.*

**Démonstration.** Pour tout $x \in E$, on a $p_*\Pi_1(E,x) = \{1\}$, ce qui permet de conclure à l'aide des théorème 4.4.1 et 4.2.1. □

**Définition 4.5.5** (Espace semi-localement simplement connexe)**.** *Un espace topologique $B$ connexe localement connexe par arcs est dit* semi-localement simplement connexe *lorsque tout point $x \in B$ admet un voisinage $V$ t.q. tout lacet de base $x$ contenu dans $V$ est homotope à un lacet constant dans $\Pi_1(B,x)$.*

**Remarque 4.5.6.** *Un lacet de base $x$ contenu dans $V$ peut être homotope à un lacet constant dans $\Pi_1(B,x)$ mais pas dans $\Pi_1(V,x)$.*

**Théorème 4.5.7.** *Soit $B$ un espace topologique connexe localement connexe par arcs. S'équivalent :*

(i) *$B$ admet un revêtement simplement connexe.*

(ii) *$B$ est semi-localement simplement connexe.*

**Démonstration.** (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $x \in B$, soit $V$ un ouvert de trivialisation de $x$ pour le revêtement simplement connexe de $B$. Montrer que tout lacet de base $x$ contenu dans $V$ est homotope à un lacet constant dans $\Pi_1(B,x)$. (ii) $\Rightarrow$ (i) On fixe $x_0 \in B$ et on pose $E$ l'ensemble des classes d'homotopie dans $B$ de chemins d'origine $x_0$. On définit de plus $p : E \to B$ par :

$$p([\gamma]) = \gamma(1).$$

On va munir $E$ d'une topologie. Pour cela, si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $B$ et $[\gamma] \in E$ est t.q. $\gamma(1) \in \mathcal{U}$, on pose $\mathcal{U}_{[\gamma]}$ l'ensemble des $[\gamma\eta]$, pour $\eta$ chemin d'origine $\gamma(1)$ contenu dans $\mathcal{U}$. Alors l'ensemble $\mathfrak{B}$ des $\mathcal{U}_{[\gamma]}$ est stable par intersections finies ; c'est donc une base de topologie. On munit donc $E$ de la topologie dont $\mathfrak{B}$ est une base. Alors $p$ est continue, c'est un revêtement. Et $E$ est simplement connexe selon la proposition 4.1.3. $\square$

## 4.6 Correspondance de Galois

**Définition 4.6.1** (Revêtement marqué)**.** *On appelle* revêtement marqué *d'un espace pointé* $(B,x)$ *la donnée d'un revêtement* $p : E \to B$ *et d'un point* $\tilde{x} \in p^{-1}(\{x\})$.

**Théorème 4.6.2** (Correspondance de Galois)**.** *Soit* $(X,x_0)$ *un espace pointé connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. On note* $\mathcal{G}$ *l'ensemble des sous-groupes de* $\Pi_1(X,x_0)$ *et* $\mathcal{R}$ *l'ensemble des classes d'isomorphisme des revêtements marqués connexes de* $(X,x_0)$*. Alors l'application suivante est une bijection :*

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{G} \\ [p] \longmapsto \operatorname{Im} p_* \end{array} \right. .$$

*De plus, cette bijection fait correspondre les classes d'isomorphisme des revêtements galoisiens avec les sous-groupes distingués de* $\Pi_1(X,x_0)$*.*

**Démonstration.** *Injectivité.* Soit $p_1 : (E_1,x_1) \to (X,x_0)$ et $p_2 : (E_2,x_2) \to (X,x_0)$ deux revêtements marqués connexes de $(X,x_0)$ t.q.

$$p_{1*}\Pi_1(E_1,x_1) = p_{2*}\Pi_1(E_2,x_2).$$

Selon le théorème 4.2.1, il existe des applications $\varphi : (E_1,x_1) \to (E_2,x_2)$ et $\psi : (E_2,x_2) \to (E_1,x_1)$ t.q. $p_1 = p_2 \circ \varphi$ et $p_2 = p_1 \circ \psi$. Ainsi, $\psi \circ \varphi$ est un automorphisme de $E_1$ fixant $x_1$, donc $\psi \circ \varphi = id_{E_1}$, car $\operatorname{Aut}(E_1,p_1)$ agit librement sur $E_1$ (c.f. proposition 3.6.1). De même, $\varphi \circ \psi = id_{E_2}$. Les revêtements marqués $p_1$ et $p_2$ sont donc isomorphes. *Surjectivité.* Soit $\Gamma$ un sous-groupe de $\Pi_1(X,x_0)$. Selon le théorème 4.5.7, $X$ admet un revêtement $p : \widetilde{X} \to X$ simplement connexe. Selon le théorème 4.4.1, on a alors :

$$\operatorname{Aut}\left(\widetilde{X},p\right) \simeq \Pi_1(X,x_0).$$

Par conséquent, $\Gamma$ s'identifie à un sous-groupe de $\operatorname{Aut}\left(\widetilde{X},p\right)$, donc $\Gamma$ agit sur $\widetilde{X}$. On considère alors l'espace quotient $\widetilde{X}/\Gamma$, et la projection canonique $\tilde{q} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}/\Gamma$ (qui est un revêtement selon le théorème 3.4.5). On vérifie que $\tilde{q}$ se factorise en $q : \widetilde{X}/\Gamma \to X$, i.e. $p = q \circ \tilde{q}$. Alors $q$ est aussi un revêtement, et on vérifie que $\operatorname{Im} q_* = \Gamma$ (après s'être donné un point base de $\widetilde{X}$ puis de $\widetilde{X}/\Gamma$). $\square$

**Remarque 4.6.3.** *Soit* $X$ *un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements (non marqués) connexes de* $X$ *est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison des sous-groupes de* $\Pi_1(X)$*.*

# Références

[1] H.-P. de Saint-Gervais. Analysis situ. http://analysis-situs.math.cnrs.fr/.

[2] A. Hatcher. *Algebraic Topology.*