Intégration et Mesure

Cours de Emmanuel Grenier
Notes de Alexis Marchand

ENS de Lyon
S1 2017-2018
Niveau L3

Table des matières

1 Rappels sur la dénombrabilité

Définition 1.0.1 (Ensemble dénombrable)**.** *On dit qu'un ensemble E est* dénombrable *s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.*

Proposition 1.0.2. *Une partie de $\mathbb{N}$ est soit finie, soit dénombrable.*

Proposition 1.0.3. *Soit E un ensemble. S'il existe une injection $E \hookrightarrow \mathbb{N}$ ou une surjection $\mathbb{N} \twoheadrightarrow E$, alors E est fini ou dénombrable.*

Exemple 1.0.4. *$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^k$ (pour $k \in \mathbb{N}$), $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.*

Proposition 1.0.5.

(i) *Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

(ii) *Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.*

Exemple 1.0.6. *$\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{N})$, $\mathbb{Z}[X]$ et l'ensemble des nombres algébriques sont dénombrables.*

Théorème 1.0.7. *$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.*

Corollaire 1.0.8. *$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.*

Théorème 1.0.9 (Théorème de Cantor Bernstein)**.** *Soit E et F deux ensembles. S'il existe une injection $E \hookrightarrow F$ et une injection $F \hookrightarrow E$, alors E et F sont en bijection.*

Théorème 1.0.10. *$\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, donc non dénombrable.*

Remarque 1.0.11. *Comme $\mathbb{R}$ est infini non dénombrable alors que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, il existe des nombres transcendants (i.e. non algébriques).*

2 σ-algèbres et mesures

2.1 Algèbres et σ-algèbres

Définition 2.1.1 (Algèbre)**.** *Soit X un ensemble. On dit que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ est une* algèbre *sur X lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $X \in \mathcal{A}$.

(ii) $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2,\ A \cup B \in \mathcal{A}$.

(iii) $\forall A \in \mathcal{A},\ (X \backslash A) \in \mathcal{A}$.

Remarque 2.1.2. *Dans la définition, on peut remplacer la condition* (i) *par $\varnothing \in \mathcal{A}$. On peut aussi remplacer la condition* (ii) *par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n,\ \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ ou par $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2,\ A \cap B \in \mathcal{A}$.*

Exemple 2.1.3. *Soit X un ensemble. Alors les ensembles suivants sont des algèbres sur X : $\{\varnothing, X\}$, $\mathcal{P}(X)$, $\{A \subset X,\ A \text{ ou } (X \backslash A) \text{ est fini}\}$, $\{A \subset X,\ A \text{ ou } (X \backslash A) \text{ est fini ou dénombrable}\}$.*

Définition 2.1.4 (σ-algèbre)**.** *Soit X un ensemble. On dit que $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ est une* σ-algèbre *(ou* tribu*) sur X lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $X \in \mathcal{B}$.

(ii) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}},\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.

(iii) $\forall A \in \mathcal{B},\ (X \backslash A) \in \mathcal{B}$.

On dit alors que $(X, \mathcal{B})$ est un espace mesurable.

Remarque 2.1.5. *Dans la définition, on peut remplacer la condition* (i) *par $\varnothing \in \mathcal{B}$. On peut aussi remplacer la condition* (ii) *par $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}},\ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.*

Remarque 2.1.6. *Toute σ-algèbre est une algèbre.*

Exemple 2.1.7. *Soit X un ensemble. Alors les ensembles suivants sont des σ-algèbres : $\{\varnothing, X\}$, $\mathcal{P}(X)$, $\{A \subset X,\ A \text{ ou } (X \backslash A) \text{ est fini ou dénombrable}\}$. Mais $\{A \subset X,\ A \text{ ou } (X \backslash A) \text{ est fini}\}$ n'est en général pas une σ-algèbre sur X.*

2.2 σ-algèbres engendrées

Lemme 2.2.1. *Soit X un ensemble. Alors une intersection quelconque de σ-algèbres sur X est une σ-algèbre sur X.*

Définition 2.2.2 (σ-algèbre engendrée)**.** *Soit X un ensemble. Étant donné $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$, on appelle* σ-algèbre engendrée *par $\mathcal{C}$, notée $\sigma(\mathcal{C})$, la plus petite σ-algèbre sur X contenant $\mathcal{C}$.*

Définition 2.2.3 (Tribu borélienne)**.** *Si X est un espace topologique, on appelle* tribu borélienne *de X, notée $\mathrm{Bor}(X)$, la σ-algèbre engendrée par les ouverts de X. Les éléments de $\mathrm{Bor}(X)$ sont appelés* boréliens*. Sauf mention contraire, les espaces topologiques seront désormais munis de leurs tribus boréliennes.*

Remarque 2.2.4. *Soit X un espace topologique. Pour montrer qu'une propriété $\mathfrak{P}$ est vérifiée par tout $A \in \mathrm{Bor}(X)$, il suffit de montrer que $\{A \in \mathcal{P}(X),\ A \text{ vérifie } \mathfrak{P}\}$ est une σ-algèbre contenant $\mathfrak{M}$, où $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$ vérifie $\sigma(\mathfrak{M}) = \mathrm{Bor}(X)$.*

Exemple 2.2.5. *La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les parties suivantes de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$: l'ensemble des ouverts, l'ensemble des fermés, $\{]a,b[,\ -\infty < a < b < +\infty\}$, $\{]a,b],\ -\infty < a < b < +\infty\}$, $\{[a,b],\ -\infty < a < b < +\infty\}$, $\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}$, etc.*

2.3 Mesures

Définition 2.3.1 (Mesure)**.** *Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable. On appelle* mesure *sur $(X, \mathcal{B})$ toute application $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\mu(\varnothing) = 0$.

(ii) *Pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints, on a $\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.*

On dit alors que $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré*.*

Exemple 2.3.2. *Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable.*

(i) *Soit $a \in X$. On appelle* mesure de Dirac *en a la mesure*

$$\delta_a : A \in \mathcal{B} \longmapsto \begin{cases} 1 & si\ a \in A \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

(ii) *On appelle* mesure de comptage *la mesure*

$$\mu : A \in \mathcal{B} \longmapsto |A| \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

Proposition 2.3.3. *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Alors :*

(i) $\forall (A, B) \in \mathcal{B}^2,\ A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(ii) $\forall (A, B) \in \mathcal{B}^2,\ A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$.

(iii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}},\ \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Proposition 2.3.4. *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré.*

(i) *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante pour l'inclusion. Alors :*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

(ii) *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante pour l'inclusion. Alors :*

$$\mu(A_0) < +\infty \Longrightarrow \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Exemple 2.3.5. *On se place dans* $\mathbb{N}$*, muni de la mesure de comptage* μ *(sur la tribu* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$*). Pour* $i \in \mathbb{N}$*, on pose* $A_i = [\![i, +\infty[\![$*. Alors* $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mu(A_i) = +\infty$ *mais* $\mu\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \mu(\varnothing) = 0$.

Définition 2.3.6 (Mesures finies, de probabilité, σ-finies)**.** *Soit* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré.*

(i) *Si* $\mu(X) < +\infty$ *(ce qui implique* $\forall A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) < +\infty$*), on dit que* μ *est une* mesure finie.

(ii) *Si* $\mu(X) = 1$*, on dit que* μ *est une* mesure de probabilité.

(iii) *S'il existe une suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ *t.q.* $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(X_n) < +\infty$*, on dit que* μ *est une* mesure σ-finie.

Définition 2.3.7 (Ensembles de mesure nulle et ensembles négligeables)**.** *Soit* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré.*

(i) *On dit qu'un ensemble* $A \in \mathcal{B}$ *est* de mesure nulle *lorsque* $\mu(A) = 0$.

(ii) *On dit qu'un ensemble* $C \in \mathcal{P}(X)$ *est* négligeable *lorsque* $\exists A \in \mathcal{B}$, $C \subset A$ et $\mu(A) = 0$.

On dit qu'une propriété est vraie presque-partout *si elle est vraie partout sauf sur un ensemble négligeable.*

Définition 2.3.8 (Complétion d'une tribu)**.** *Soit* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré. On appelle* complétion *de* $\mathcal{B}$ *par* μ *la tribu suivante :*

$$\mathcal{B}_\mu = \left\{A \in \mathcal{P}(X),\ \exists (B, C) \in \mathcal{B}^2,\ B \subset A \subset C \text{ et } \mu(C \backslash B) = 0\right\}.$$

Si $A \in \mathcal{B}_\mu$, $(B, C) \in \mathcal{B}^2$ *avec* $B \subset A \subset C$ et $\mu(C\backslash B) = 0$*, on définit* $\widetilde{\mu}(A) = \mu(B) = \mu(C)$*. Alors* $(X, \mathcal{B}_\mu, \widetilde{\mu})$ *est un espace mesuré, et* $\widetilde{\mu}_{|\mathcal{B}} = \mu$.

2.4 Mesure de Lebesgue

Théorème 2.4.1 (Théorème de Carathéodory)**.** *Soit* $\mathcal{A}$ *une algèbre sur un ensemble* X*, et* $m : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *une fonction additive (i.e.* $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2$, $A \cap B = \varnothing \Longrightarrow m(A \sqcup B) = m(A) + m(B)$*). On suppose que :*

(c) *Pour toute suite décroissante* $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *t.q.* $m(A_0) < +\infty$ *et* $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p = \varnothing$*, on a* $m(A_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

(c_∞) *Il existe une suite croissante* $(X_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *t.q.* $X = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} X_p$ *avec* $\forall p \in \mathbb{N}$, $m(X_p) < +\infty$ *t.q.* $\forall A \in \mathcal{A}$, $m(A) = +\infty \Longrightarrow m(A \cap X_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$.

Alors m *se prolonge de manière unique en une mesure* μ *définie sur* $\sigma(\mathcal{A})$.

Démonstration. Voir paragraphe 2.7. □

Définition 2.4.2 (Pavés et ensembles pavables)**.**

(i) *On appelle* pavé *de* $\mathbb{R}^n$ *tout ensemble* $P \subset \mathbb{R}^n$ *de la forme* $P = \prod_{k=1}^n (a_k, b_k)$*, où* (a_k, b_k) *est un intervalle quelconque de* $\mathbb{R}$ *pour* $k \in [\![1, n]\!]$*. On pose alors* $m(P) = \prod_{k=1}^n |b_k - a_k|$*, avec la convention* $0 \times (+\infty) = 0$.

(ii) *On dit qu'un sous-ensemble de* $\mathbb{R}^n$ *est* pavable *s'il s'écrit comme réunion finie de pavés. On prolonge* m *(de manière additive) à tout ensemble pavable en remarquant qu'un ensemble pavable s'écrit toujours comme réunion finie disjointe de pavés.*

Lemme 2.4.3. *Soit* $M \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble pavable avec* $m(M) < +\infty$*. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un ensemble* $M' \subset M$ *pavable et compact t.q.* $0 \leqslant m(M) - m(M') \leqslant \varepsilon$.

Théorème 2.4.4 (Existence de la mesure de Lebesgue)**.** *Il existe une unique mesure notée* λ *(ou* λ_n *s'il peut y avoir ambiguïté), appelée* mesure de Lebesgue*, sur* $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ *t.q. pour tout pavé* P*,* $\lambda(P) = m(P)$.

Démonstration. Appliquer le théorème de Carathéodory (théorème 2.4.1), en utilisant l'algèbre des ensembles pavables. L'hypothèse (c_∞) est vérifiée avec $X_p = \prod_{i=1}^n [-p,p]$, pour $p \in \mathbb{N}$. Quant à l'hypothèse (c), montrer qu'elle est vérifiée en utilisant le lemme 2.4.3. $\square$

Proposition 2.4.5. *La mesure de Lebesgue est invariante par translation.*

Démonstration. Si $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une translation, définir $\mu : A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n) \longmapsto \lambda(\tau(A)) \in [0,+\infty]$. Montrer que μ est une mesure sur $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$, et coïncide avec λ sur les pavés. Selon le théorème 2.4.4, en déduire que $\lambda = \mu$. $\square$

Remarque 2.4.6. *Soit μ une mesure sur $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ invariante par translation t.q. $\mu([0,1]^n) < +\infty$. Alors $\mu = \mu([0,1]^n) \cdot \lambda$.*

Lemme 2.4.7. *Soit μ une mesure sur $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ t.q. tout compact est de mesure finie. Alors pour tout $H \subset \mathbb{R}^n$ s'écrivant comme réunion dénombrable de fermés, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $G \subset H$ t.q. $0 \leqslant \mu(H \backslash G) < \varepsilon$.*

Démonstration. On écrit $H = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p$, où $(F_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés de $\mathbb{R}^n$, qu'on peut supposer croissante quitte à remplacer F_p par $\bigcup_{q\leqslant p} F_q$. Si $\mu(H) < +\infty$, on pose $G = F_p$, où $p \in \mathbb{N}$ est choisi t.q. $\mu(H\backslash F_p) < \varepsilon$. Si $\mu(H) = +\infty$, soit $\Gamma_q = \{x \in \mathbb{R}^n,\ q \leqslant \|x\| \leqslant q+1\}$ pour $q \in \mathbb{N}$. Comme Γ_q est un compact, on a $\mu(\Gamma_q) < +\infty$. Donc $H \cap \Gamma_q$ est une réunion dénombrable de fermés, et est de mesure finie. D'après le premier cas, il existe donc un fermé $G_q \subset H \cap \Gamma_q$ t.q. $\mu(H \cap \Gamma_q \backslash G_q) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{q+2}}$. On pose alors $G = \bigcup_{q\in\mathbb{N}} G_q$. On montre aisément que G est fermé (car les G_q sont inclus dans des couronnes disjointes). De plus $G \subset H$ et $\mu(H\backslash G) < \varepsilon$. $\square$

Proposition 2.4.8. *Soit μ une mesure sur $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ t.q. tout compact est de mesure finie. Alors pour tout $A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $F \subset \mathbb{R}^n$ et un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ t.q. $F \subset A \subset \mathcal{U}$ et $0 \leqslant \mu(\mathcal{U}\backslash F) < \varepsilon$.*

Démonstration. On note $\mathfrak{M}$ l'ensemble des $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ t.q. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert $\mathcal{U}$ t.q. $F \subset A \subset \mathcal{U}$ et $0 \leqslant \mu(\mathcal{U}\backslash F) < \varepsilon$. Montrer d'abord que $\mathfrak{M}$ contient les compacts de $\mathbb{R}^n$. Comme les compacts engendrent la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$, il reste à prouver que $\mathfrak{M}$ est une σ-algèbre. En effet, on a $\varnothing \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ est stable par passage au complémentaire. Et la stabilité de $\mathfrak{M}$ par réunion dénombrable s'obtient à l'aide du lemme 2.4.7. $\square$

2.5 Mesure d'équiprobabilité sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

Notation 2.5.1. *On munit $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit, qui est générée par la distance suivante :*

$$d : \left| \begin{array}{l} \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \quad (u,v) \longmapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u_n - v_n|}{2^n} \end{array} \right. .$$

Notation 2.5.2. *Étant donné $\ell \in \mathbb{N}$ et $s = (s_0, \ldots, s_{\ell-1}) \in \{0,1\}^\ell$, on pose :*

$$C_s = \left\{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}},\ \forall i \in [\![0, \ell-1]\!],\ \omega_i = s_i\right\}.$$

On pose de plus $\mathcal{F}_\ell$ l'algèbre engendrée par $\left\{C_s,\ s \in \{0,1\}^\ell\right\}$. Alors $\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_\ell$ est une algèbre, qu'on munit d'une fonction additive $\widetilde{P} : \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_\ell \to [0,+\infty[$ en posant $\widetilde{P}(C_s) = \frac{1}{2^\ell}$ pour tout $s \in \{0,1\}^\ell$.

Proposition 2.5.3. $\sigma\left(\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_\ell\right) = \mathrm{Bor}\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)$.

Lemme 2.5.4. *Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_\ell$ t.q. $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} M_p = \varnothing$. Alors $\exists p_0 \in \mathbb{N},\ M_{p_0} = \varnothing$.*

Remarque 2.5.5. *Le lemme 2.5.4 est équivalent à dire que* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *est un espace topologique compact.*

Théorème 2.5.6. *Il existe une unique mesure* P *sur* $\operatorname{Bor}\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)$ *t.q.*

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ \forall s \in \{0,1\}^{\ell},\ P(C_s) = \frac{1}{2^{\ell}}.$$

Démonstration. Appliquer le théorème de Carathéodory (théorème 2.4.1). L'hypothèse (c_∞) est trivialement vérifiée car $\widetilde{P}\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right) = 1 < +\infty$. Quant à l'hypothèse (c), montrer qu'elle est vérifiée en utilisant le lemme 2.5.4. □

Proposition 2.5.7.

(i) *Pour tout* $\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $P(\{\omega\}) = 0$.

(ii) *Pour tout* $\Delta \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *dénombrable,* $P(\Delta) = 0$.

Théorème 2.5.8. *On considère :*

$$\psi : \left| \begin{array}{rcl} \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & [0,1] \\ \omega & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\omega_n}{2^{n+1}} \end{array} \right. .$$

(i) ψ *est surjective et continue.*

(ii) *Pour tout* $A \in \operatorname{Bor}([0,1])$, $\psi^{-1}(A) \in \operatorname{Bor}\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)$ *et* $P\left(\psi^{-1}(A)\right) = \lambda(A)$.

2.6 Classes monotones

Définition 2.6.1 (Classe monotone)**.** *Soit* X *un ensemble. On dit que* $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ *est une* classe monotone *sur* X *lorsque les trois propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) $X \in \mathcal{M}$.

(ii) $\forall (A,B) \in \mathcal{M}^2,\ A \supset B \Longrightarrow (A \backslash B) \in \mathcal{M}$.

(iii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}},\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croissante* $\Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

Remarque 2.6.2. *Toute* σ*-algèbre est une classe monotone.*

Définition 2.6.3 (Classe monotone engendrée)**.** *Soit* X *un ensemble. Étant donné* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$, *on appelle* classe monotone engendrée *par* $\mathcal{C}$, *notée* $\mathcal{M}(\mathcal{C})$, *la plus petite classe monotone sur* X *contenant* $\mathcal{C}$.

Théorème 2.6.4 (Lemme de classe monotone)**.** *Soit* X *un ensemble,* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$. *On suppose que* $\mathcal{C}$ *est stable par intersections finies. Alors* $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

Démonstration. $(\subset)$ Comme $\sigma(\mathcal{C})$ est une classe monotone contenant $\mathcal{C}$, on a $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$. $(\supset)$ Il suffit de prouver que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est une σ-algèbre. On a bien $X \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ et $\forall A \in \mathcal{M}(\mathcal{C}),\ (X\backslash A) \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$. Montrons que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est stable par intersections finies. Soit $A \in \mathcal{C}$. On considère :

$$\mathcal{N}_1 = \{B \in \mathcal{P}(X),\ A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}.$$

$\mathcal{N}_1$ est une classe monotone contenant $\mathcal{C}$ donc $\mathcal{N}_1 \supset \mathcal{M}(\mathcal{C})$. Donc $\forall A \in \mathcal{C},\ \forall B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}),\ A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$. On se donne alors $A' \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ et on considère :

$$\mathcal{N}_2 = \{B' \in \mathcal{P}(X),\ A' \cap B' \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}.$$

$\mathcal{N}_2$ est une classe monotone contenant $\mathcal{C}$ (d'après ce qui précède) donc $\mathcal{N}_2 \supset \mathcal{M}(\mathcal{C})$. Ceci prouve que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est stable par intersections finies, donc par réunions finies. Soit alors $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(\mathcal{C})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \bigcup_{k\leqslant n} A_k \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$. Alors la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$. Donc $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est une σ-algèbre contenant $\mathcal{C}$, donc $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \supset \sigma(\mathcal{C})$. □

2.7 Théorème de Carathéodory

Notation 2.7.1. *Dans ce paragraphe, $\mathcal{A}$ est une algèbre sur un ensemble X, et $m : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ est une fonction additive vérifiant les hypothèses suivantes :*

(c) *Pour toute suite décroissante $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ t.q. $m(A_0) < +\infty$ et $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p = \varnothing$, on a $m(A_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.*

(c_∞) *Il existe une suite croissante $(X_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ t.q. $X = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} X_p$ avec $\forall p \in \mathbb{N},\ m(X_p) < +\infty$ t.q. $\forall A \in \mathcal{A},\ m(A) = +\infty \Longrightarrow m(A \cap X_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$.*

Lemme 2.7.2. *Soit μ_1, μ_2 deux mesures définies sur $\sigma(\mathcal{A})$ et prolongeant m (i.e. $\mu_{1|\mathcal{A}} = \mu_{2|\mathcal{A}} = m$). Alors $\mu_1 = \mu_2$.*

Démonstration. On considère :

$$\mathcal{M} = \{M \in \sigma(\mathcal{A}),\ \forall A \in \mathcal{A},\ m(A) < +\infty \Longrightarrow \mu_1(A \cap M) = \mu_2(A \cap M)\}.$$

$\mathcal{M}$ est une classe monotone stable par intersections finies. Selon le lemme de classe monotone (théorème 2.6.4), $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre. Or $\mathcal{M} \supset \mathcal{A}$ donc $\mathcal{M} \supset \sigma(\mathcal{A})$. Avec la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de l'hypothèse (c_∞), on a alors :

$$\forall M \in \sigma(\mathcal{A}),\ \forall p \in \mathbb{N},\ \mu_1(X_p \cap M) = \mu_2(X_p \cap M).$$

En faisant tendre $p \to +\infty$, on obtient $\forall M \in \sigma(\mathcal{A}),\ \mu_1(M) = \mu_2(M)$. □

Lemme 2.7.3. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints t.q. $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Alors :*

$$m\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n).$$

Démonstration. On note $B = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Si $m(B) < +\infty$, on considère $C_n = B \backslash \bigsqcup_{k\leqslant n} A_k$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \varnothing$. Comme $m(C_0) < +\infty$, l'hypothèse (c) fournit $m(C_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui donne l'égalité voulue. Si $m(B) = +\infty$, soit $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite de l'hypothèse (c_∞). Alors $m(B \cap X_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$. Or $\forall p \in \mathbb{N},\ m(B \cap X_p) < +\infty$. D'après ce qui précède, on a donc :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ m(B \cap X_p) = m\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap X_p)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n \cap X_p) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n).$$

En faisant tendre $p \to +\infty$, il vient $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) = +\infty = m\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$. □

Définition 2.7.4 (Mesure extérieure)**.** *On définit :*

$$\mu^* : \left|\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ E & \longmapsto & \displaystyle\inf_{\substack{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \\ E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}} \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \end{array}\right.$$

Lemme 2.7.5.

(i) *μ^* est croissante : $\forall (E, F) \in \mathcal{P}(X)^2,\ E \subset F \Longrightarrow \mu^*(E) \leqslant \mu^*(F)$.*

(ii) *μ^* est sous-additive : $\forall (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}},\ \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n)$.*

(iii) *μ^* prolonge m : $\forall A \in \mathcal{A},\ \mu^*(A) = m(A)$.*

Définition 2.7.6 (Partie μ-mesurable)**.** *On définit :*

$$\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}(X),\ \forall E \in \mathcal{P}(X),\ \mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \backslash B)\}.$$

Les éléments de $\mathcal{B}$ sont appelés les parties μ-mesurables *de X.*

Lemme 2.7.7. *$\mathcal{B}$ est une algèbre contenant $\mathcal{A}$, et $\forall (B,C) \in \mathcal{B}$, $B \cap C = \varnothing \Longrightarrow \mu^*(B \sqcup C) = \mu^*(B) + \mu^*(C)$.*

Lemme 2.7.8. *$\mathcal{B}$ est une σ-algèbre contenant $\mathcal{A}$, et pour toute famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints, $\mu^*(\sqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n)$.*

Théorème 2.7.9 (Théorème de Carathéodory)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur un ensemble X, et $m : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ une fonction additive. On suppose que :*

- *(c) Pour toute suite décroissante $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ t.q. $m(A_0) < +\infty$ et $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p = \varnothing$, on a $m(A_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.*
- *(c_∞) Il existe une suite croissante $(X_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ t.q. $X = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} X_p$ avec $\forall p \in \mathbb{N}$, $m(X_p) < +\infty$ t.q. $\forall A \in \mathcal{A}$, $m(A) = +\infty \Longrightarrow m(A \cap X_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$.*

Alors m se prolonge de manière unique en une mesure μ définie sur $\sigma(\mathcal{A})$.

3 Intégration

3.1 Fonctions mesurables

Définition 3.1.1 (Fonction mesurable)**.** *Soit $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est* mesurable *lorsque :*

$$\forall B \in \mathcal{B},\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Proposition 3.1.2. *Soit $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$ deux espaces mesurables, $f : X \to Y$. Soit $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(Y)$ t.q. $\sigma(\mathfrak{M}) = \mathcal{B}$. Alors f est mesurable* ssi *$\forall M \in \mathfrak{M}$, $f^{-1}(M) \in \mathcal{A}$.*

Corollaire 3.1.3. *Si X et Y sont deux espaces topologiques, alors toute fonction continue de X dans Y est mesurable (X et Y étant munis de leurs tribus boréliennes respectives).*

Proposition 3.1.4. *Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est mesurable* ssi *pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]a,+\infty]) \in \mathcal{A}$.*

Proposition 3.1.5. *Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable, $f : X \to \mathbb{R}^d$. Pour $i \in [\![1,d]\!]$, soit $f_i : X \to \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in X$, $f(x) = (f_1(x),\dots,f_d(x))$. Alors f est mesurable* ssi *$\forall i \in [\![1,d]\!]$, f_i est mesurable.*

Proposition 3.1.6. *Toute composée de fonctions mesurables est mesurable.*

Proposition 3.1.7. *Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable, $f,g : X \to \mathbb{R}$. On suppose f et g mesurables. Alors $(f+g)$ est mesurable, (λf) est mesurable pour $\lambda \in \mathbb{R}$, (fg) est mesurable. De plus, si g ne s'annule pas, alors $\left(\frac{f}{g}\right)$ est mesurable.*

Proposition 3.1.8. *Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\overline{\mathbb{R}}^X\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables. Alors :*

- (i) *$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ et $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sont mesurables.*
- (ii) *$\limsup_{n\to+\infty} f_n$ et $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ sont mesurables.*
- (iii) *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, alors $\lim_{n\to+\infty} f_n$ est mesurable.*

Proposition 3.1.9. *Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\overline{\mathbb{R}}^X\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-partout (i.e. $\left\{x \in X,\ (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge}\right\}$ est de mesure nulle). On pose :*

$$f : \left| \begin{array}{l} X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x \longmapsto \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) & \text{si } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

Alors f est mesurable.

Exemple 3.1.10. *On munit* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *de la tribu* $\mathcal{F}_\ell$ *définie dans la notation 2.5.2. Alors une fonction* $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ *est mesurable* ssi *elle ne dépend que des* ℓ *premières coordonnées.*

3.2 Intégrale des fonctions positives

Définition 3.2.1 (Fonction simple)**.** *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. On dit qu'une fonction mesurable* $\varphi : X \to [0, +\infty]$ *est* simple *lorsque* $\varphi(X)$ *est fini et* $\varphi(X) \subset [0, +\infty[$.

Définition 3.2.2 (Intégrale d'une fonction simple)**.** *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $\varphi : X \to [0, +\infty]$ *une fonction simple. On définit :*

$$\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu = \sum_{\alpha \in \varphi(X)} \alpha \mu \left(\varphi^{-1} (\{\alpha\}) \right),$$

avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$.

Définition 3.2.3 (Intégrale d'une fonction positive)**.** *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \to [0, +\infty]$ *une fonction mesurable. On définit :*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{\substack{\varphi \text{ simple} \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant f}} \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu.$$

Proposition 3.2.4. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f, g : X \to [0, +\infty]$ *deux fonctions mesurables.*

(i) *Si* $f \leqslant g$ *alors* $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.

(ii) *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\int_X \lambda f \, \mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \, \mathrm{d}\mu$.

Théorème 3.2.5 (Théorème de convergence monotone, ou théorème de Beppo Levi)**.** *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \left([0, +\infty]^X \right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables. On suppose que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \leqslant f_{n+1}.$$

Alors $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ *est mesurable et :*

$$\int_X \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) \mathrm{d}\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \right).$$

Démonstration. On note $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$. D'après la proposition 3.1.8, f est mesurable. Montrons l'égalité voulue. ($\geqslant$) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \leqslant f$, donc d'après la proposition 3.2.4, $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. Donc :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \right) \leqslant \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

($\leqslant$) Soit φ une fonction simple t.q. $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. Soit $c \in]0, 1[$. On a $\forall x \in X,\ \exists n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \geqslant c\varphi(x)$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{x \in X,\ f_n(x) \geqslant c\varphi(x)\}$. Alors $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X.$$

Or, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_X f_n \mathbb{1}_{A_n} \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_X c\varphi \mathbb{1}_{A_n} \, \mathrm{d}\mu = c \int_X \varphi \mathbb{1}_{A_n} \, \mathrm{d}\mu. \tag{$*$}$$

On montre de plus que l'application $\nu : A \in \mathcal{A} \longmapsto \int_X \varphi \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu$ est une mesure, d'où on déduit avec la proposition 2.3.4 que $\int_X \varphi \mathbb{1}_{A_n} \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_X \varphi \mathbb{1}_X \, \mathrm{d}\mu = \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu$. En faisant tendre $n \to +\infty$ dans ($*$), on obtient donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geqslant c \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu$. En faisant tendre $c \to 1$, on a $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu$. Puis en passant au sup sur φ, on obtient finalement $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. $\square$

Proposition 3.2.6. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \to [0, +\infty]$ *une fonction mesurable. Alors il existe une suite croissante* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions simples t.q.* $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{4^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right)} + 2^n \mathbb{1}_{f^{-1}([2^n,+\infty])}.$$

Alors $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convient. □

Lemme 3.2.7. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $\varphi, \psi : X \to [0, +\infty]$ *deux fonctions simples. Alors* $\int_X (\varphi + \psi) \, \mathrm{d}\mu = \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu + \int_X \psi \, \mathrm{d}\mu$.

Lemme 3.2.8. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $f, g : X \to [0, +\infty]$ *deux fonctions mesurables. Alors* $\int_X (f + g) \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.

Théorème 3.2.9. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left([0, +\infty]^X\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables. Alors* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *est mesurable et :*

$$\int_X \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_X u_n \, \mathrm{d}\mu\right).$$

Théorème 3.2.10 (Théorème de convergence monotone décroissant)**.** *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left([0, +\infty]^X\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite décroissante de fonctions mesurables. On suppose que* $\int_X f_0 \, \mathrm{d}\mu < +\infty$.*Alors* $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *est mesurable et :*

$$\int_X \left(\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\right) \mathrm{d}\mu = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu\right).$$

Proposition 3.2.11. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \to [0, +\infty]$ *mesurable. S'équivalent :*

(i) $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

(ii) f *est nulle presque-partout (i.e.* $\mu(\{x \in X, \ f(x) > 0\}) = 0$*).*

Démonstration. On note $A = \{x \in X, \ f(x) > 0\}$. (ii) $\Rightarrow$ (i) On a $f \leqslant \sup_{p\in\mathbb{N}} p\mathbb{1}_A$, donc, en utilisant le théorème de convergence monotone (théorème 3.2.5) :

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X \left(\sup_{p\in\mathbb{N}} p\mathbb{1}_A\right) \mathrm{d}\mu = \sup_{p\in\mathbb{N}} \int_X p\mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu = \sup_{p\in\mathbb{N}} (p \cdot \mu(A)) = 0.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) On raisonne de même en utilisant le fait que $\mathbb{1}_A \leqslant \sup_{p\in\mathbb{N}} pf$. □

Théorème 3.2.12 (Lemme de Fatou)**.** *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left([0, +\infty]^X\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables. Alors :*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \left(\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu\right).$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n = \inf_{p\geqslant n} f_p$. Alors $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables et $\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n = \liminf_{n\to+\infty} f_n$. D'après le théorème de convergence monotone (théorème 3.2.5) :

$$\int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu.$$

Soit de plus $n \in \mathbb{N}$. On a $\forall p \geqslant n$, $g_n \leqslant f_p$ donc $\forall p \geqslant n$, $\int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f_p \, \mathrm{d}\mu$. En passant à l'inf sur p, il vient $\int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \inf_{p\geqslant n} (\int_X f_p \, \mathrm{d}\mu)$. En faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient alors l'inégalité voulue. □

3.3 Intégrale des fonctions sommables réelles

Notation 3.3.1. *Si X est un ensemble et $f : X \to \mathbb{R}$, on notera $f^+ : x \in X \longmapsto \max(f(x), 0) \in \mathbb{R}_+$ et $f^- : x \in X \longmapsto \max(-f(x), 0) \in \mathbb{R}_+$.*

Définition 3.3.2 (Fonction sommable)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que f est* sommable *lorsque :*

$$\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Si tel est le cas, on définit :

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu.$$

De même, une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ est dite sommable lorsque $\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$, et on définit alors son intégrale en passant à la partie réelle et à la partie imaginaire de f.

Lemme 3.3.3. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soit $u_1, u_2 : X \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions mesurables positives t.q. $f = u_1 - u_2$. Alors $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X u_1 \, \mathrm{d}\mu - \int_X u_2 \, \mathrm{d}\mu$.*

Notation 3.3.4. *Dans toute la suite, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Proposition 3.3.5. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On note $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des fonctions $X \to \mathbb{K}$ sommables. Alors :*

(i) *$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

(ii) *L'application $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \longmapsto \int_X f \, \mathrm{d}\mu \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire.*

(iii) *$\forall f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu), \ \left|\int_X f \, \mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$.*

(iv) *Si $f_1 \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f_2 \in \mathbb{K}^X$ mesurable, $f_1 = f_2$ presque-partout, alors $f_2 \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu = \int_X f_2 \, \mathrm{d}\mu$.*

Définition 3.3.6 (Intégrale sur un sous-ensemble)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, soit $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Étant donné $A \in \mathcal{A}$, on définit :*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu.$$

Remarque 3.3.7. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $M \in \mathcal{A}$; on note $\mathcal{A}_M = \{A \in \mathcal{A}, \ A \subset M\}$ et $\mu_M = \mu_{|\mathcal{A}_M}$. Alors $(M, \mathcal{A}_M, \mu_M)$ est un espace mesuré et, pour tout $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\int_A f \, \mathrm{d}\mu_M = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$.*

Théorème 3.3.8 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^X\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-partout vers une fonction f (qui est donc mesurable) et que :*

$$\exists h \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu), \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \exists A_n \in \mathcal{A}, \ \forall x \in X \backslash A_n, \ |f_n(x)| \leqslant h(x) \ \text{ et } \ \mu(A_n) = 0.$$

Alors :

(i) *$\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

(ii) *$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X f \, \mathrm{d}\mu$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que (ii) est une conséquence immédiate de (i) (avec la proposition 3.3.5). Prouvons donc (i). Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = |f_n - f|$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-partout vers 0. On note de plus $A = \left\{x \in X, \ (u_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas vers } 0\right\} \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$. On a

$\mu(A) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X\backslash A$, $0 \leqslant u_n(x) \leqslant 2h(x)$. On applique alors le lemme de Fatou (théorème 3.2.12) à la suite $(2h - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
2\int_X h \, \mathrm{d}\mu = 2\int_{X\backslash A} h \, \mathrm{d}\mu &= \int_{X\backslash A} \left(\liminf_{n\to+\infty} (2h - u_n)\right) \mathrm{d}\mu \\
&\leqslant \liminf_{n\to+\infty} \left(\int_{X\backslash A} (2h - u_n) \, \mathrm{d}\mu\right) = \liminf_{n\to+\infty} \left(2\int_{X\backslash A} h \, \mathrm{d}\mu - \int_{X\backslash A} u_n \, \mathrm{d}\mu\right) \\
&= 2\int_{X\backslash A} h \, \mathrm{d}\mu + \liminf_{n\to+\infty} \left(-\int_{X\backslash A} u_n \, \mathrm{d}\mu\right) \\
&= 2\int_{X\backslash A} h \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to+\infty} \int_{X\backslash A} u_n \, \mathrm{d}\mu = 2\int_X h \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to+\infty} \int_X u_n \, \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$0 \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_X u_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \int_X u_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant 0.$$

Donc $\liminf_{n\to+\infty} \int_X u_n \, \mathrm{d}\mu = \limsup_{n\to+\infty} \int_X u_n \, \mathrm{d}\mu = 0$, d'où $\int_X u_n \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. $\square$

Théorème 3.3.9 (Continuité d'une intégrale à paramètre)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $\Omega \subset \mathbb{K}^n$, $t_0 \in \Omega$ et $f : X \times \Omega \to \mathbb{K}$. On suppose que :*

(i) *Pour tout $t \in \Omega$, $f(\cdot, t)$ est mesurable.*

(ii) *Pour presque tout $x \in X$, $f(x, \cdot)$ est continue en t_0.*

(iii) *Il existe $h \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ t.q. pour tout $t \in \Omega$, pour presque tout $x \in X$, $|f(x,t)| \leqslant h(x)$.*

Alors l'application $F : t \in \Omega \longmapsto \int_X f(\cdot, t) \, \mathrm{d}\mu$ est bien définie et continue en t_0.

Remarque 3.3.10. *L'hypothèse* (iii) *du théorème 3.3.9 s'écrit :* $\forall t \in \Omega$, $\exists A_t \in \mathcal{A}$, $\mu(A_t) = 0$ et $\forall x \in X\backslash A_t$, $|f(x,t)| \leqslant h(x)$. *Ainsi, A_t peut dépendre de t.*

Théorème 3.3.11 (Dérivabilité d'une intégrale à paramètre)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : X \times I \to \mathbb{K}$. On suppose que :*

(i) *Pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est mesurable.*

(ii) *Il existe $h \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $A \in \mathcal{A}$ avec $\mu(A) = 0$ t.q. $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est définie en tout point de $(X\backslash A) \times I$ et :*

$$\forall t \in I, \ \forall x \in (X\backslash A), \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant h(x).$$

Alors l'application $F : t \in I \longmapsto \int_X f(\cdot, t) \, \mathrm{d}\mu$ est bien définie et dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, \ F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \, \mathrm{d}\mu.$$

Remarque 3.3.12. *Dans l'hypothèse* (ii) *du théorème 3.3.11, A doit être indépendant de t.*

3.4 Intégrales multiples

Définition 3.4.1 (Tribu produit)**.** *Soit $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On appelle* tribu produit *de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ la tribu sur $X \times Y$ définie par :*

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma\left(\{A \times B, \ (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}\right) \subset \mathcal{P}(X \times Y).$$

Proposition 3.4.2. *Soit $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Soit $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathfrak{N} \subset \mathcal{P}(Y)$ t.q. $\mathcal{A} = \sigma(\mathfrak{M})$ et $\mathcal{B} = \sigma(\mathfrak{N})$. Alors $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma\left(\{M \times Y, \ M \in \mathfrak{M}\} \cup \{X \times N, \ N \in \mathfrak{N}\}\right)$.*

Démonstration. On note $L = \{M \times Y,\ M \in \mathfrak{M}\} \cup \{X \times N,\ N \in \mathfrak{N}\}$. L'inclusion $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \supset \sigma(L)$ est claire. Réciproquement, considérer $\{A \in \mathcal{P}(X),\ A \times Y \in \sigma(L)\}$. C'est une σ-algèbre qui contient $\mathfrak{M}$ donc $\mathcal{A}$. Ceci prouve que $\forall A \in \mathcal{A},\ A \times Y \in \sigma(L)$. De même, $\forall B \in \mathcal{B},\ X \times B \in \sigma(L)$. Donc $\forall (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B},\ A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) \in \sigma(L)$, d'où $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \sigma(L)$. □

Corollaire 3.4.3. *Soit X et Y deux espaces métriques séparables. Alors :*

$$\mathrm{Bor}(X \times Y) = \mathrm{Bor}(X) \otimes \mathrm{Bor}(Y).$$

Lemme 3.4.4. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. On note $\mathcal{E}$ l'algèbre sur $X \times Y$ engendrée par $\{A \times B,\ (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}$. On munit $\mathcal{E}$ d'une fonction additive θ définie par $\forall (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B},\ \theta(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. Soit $S \in \mathcal{E}$. Pour $x \in X$, on note $S_x = \{y \in Y,\ (x, y) \in S\}$. Alors :*

(i) *Pour tout $x \in X$, $S_x \in \mathcal{B}$.*

(ii) *La fonction $f_S : x \longmapsto \nu(S_x) \in [0, +\infty]$ est mesurable et :*

$$\int_X f_S \,\mathrm{d}\mu = \theta(S).$$

Théorème 3.4.5. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Alors il existe une unique mesure notée $(\mu \otimes \nu)$ sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ t.q.*

$$\forall (A, B) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B},\ (\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Démonstration. Appliquer le théorème de Carathéodory (théorème 2.7.9), en utilisant l'algèbre $\mathcal{E}$ engendrée par $\{A \times B,\ (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}$. L'hypothèse (c_∞) est vérifiée (en utilisant le fait que X et Y sont σ-finis). Pour l'hypothèse (c), montrer qu'elle est vérifiée en utilisant le lemme 3.4.4 puis le théorème de convergence monotone décroissant (théorème 3.2.10). □

Remarque 3.4.6. *Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Alors* $\mathrm{Bor}\left(\mathbb{K}^{p+q}\right) = \mathrm{Bor}\left(\mathbb{K}^p\right) \otimes \mathrm{Bor}\left(\mathbb{K}^q\right)$ *et $\lambda_{p+q} = \lambda_p \otimes \lambda_q$.*

Proposition 3.4.7 (Sommation par tranches)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Pour $x \in X$, soit $S_x = \{y \in Y,\ (x, y) \in S\}$. Alors :*

(i) *Pour tout $x \in X$, $S_x \in \mathcal{B}$.*

(ii) *La fonction $f_S : x \longmapsto \nu(S_x) \in [0, +\infty]$ est mesurable et :*

$$\int_X f_S \,\mathrm{d}\mu = (\mu \otimes \nu)(S).$$

Démonstration. On pose $\mathcal{C}$ l'ensemble des $S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ vérifiant la conclusion du théorème. $\mathcal{C} \supset \{A \times B,\ (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}$ selon le lemme 3.4.4. Montrer que $\mathcal{C}$ est une classe monotone stable par intersections finies et en déduire que $\mathcal{C}$ est une σ-algèbre à l'aide du lemme de classe monotone (théorème 2.6.4). Ainsi, $\mathcal{C} \supset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. □

Théorème 3.4.8 (Théorème de Fubini pour les fonctions positives)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors :*

(i) *$\forall x \in X,\ f(x, \cdot)$ est mesurable et $x \longmapsto \int_Y f(x, \cdot) \,\mathrm{d}\nu$ est mesurable.*

(ii) *$\forall y \in Y,\ f(\cdot, y)$ est mesurable et $y \longmapsto \int_X f(\cdot, y) \,\mathrm{d}\mu$ est mesurable.*

(iii) *On a l'égalité :*

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) \,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu = \int_{X \times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu \right) \mathrm{d}\nu.$$

Démonstration. Si $f = \mathbb{1}_S$, avec $S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, le théorème n'est qu'une réécriture de la proposition 3.4.7. On en déduit le résultat pour toutes les fonctions simples, puis pour toutes les fonctions positives à l'aide de la proposition 3.2.6 et du théorème de convergence monotone (théorème 3.2.5). □

Théorème 3.4.9 (Théorème de Fubini)**.** *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *et* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *deux espaces mesurés* σ*-finis. Soit* $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$*. Alors :*

(i) *Il existe* $A \in \mathcal{A}$ *avec* $\mu(A) = 0$ *t.q.* $\forall x \in X \backslash A$, $f(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *et* $x \in X \backslash A \longmapsto \int_Y f(x, \cdot)\, \mathrm{d}\nu$ *est sommable.*

(ii) *Il existe* $B \in \mathcal{B}$ *avec* $\nu(B) = 0$ *t.q.* $\forall y \in Y \backslash B$, $f(\cdot, y) \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ *et* $y \in Y \backslash B \longmapsto \int_X f(\cdot, y)\, \mathrm{d}\mu$ *est sommable.*

(iii) *On a l'égalité :*

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y)\, \mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu = \int_{X \times Y} f\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left(\int_X f(x, y)\, \mathrm{d}\mu \right) \mathrm{d}\nu.$$

3.5 Mesure image et changement de variable

3.5.1 Mesure de densité

Théorème 3.5.1. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré* σ*-fini,* $\rho : X \to [0, +\infty]$ *mesurable et finie presque-partout. On pose :*

$$\nu : A \in \mathcal{A} \longmapsto \int_A \rho\, \mathrm{d}\mu.$$

Alors :

(i) ν *est une mesure* σ*-finie, dite* mesure de densité ρ *par rapport à* μ*.*

(ii) *Pour toute fonction* $f : X \to [0, +\infty]$ *mesurable, on a :*

$$\int_X f\, \mathrm{d}\nu = \int_X f\rho\, \mathrm{d}\mu.$$

(iii) *Pour toute fonction* $f : X \to \mathbb{K}$ *mesurable,* $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \nu)$ ssi $(f\rho) \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$*. Dans ce cas,* $\int_X f\, \mathrm{d}\nu = \int_X f\rho\, \mathrm{d}\mu$*.*

3.5.2 Mesure image

Définition 3.5.2 (Mesure image)**.** *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $(Y, \mathcal{B})$ *un espace mesurable. Si* $\phi : X \to Y$ *est une fonction mesurable, on définit la* mesure image *de* μ *par* ϕ *par :*

$$\phi_*\mu : B \in \mathcal{B} \longmapsto \mu\left(\phi^{-1}(B)\right).$$

C'est une mesure sur $(Y, \mathcal{B})$*.*

Proposition 3.5.3. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $(Y, \mathcal{B})$ *un espace mesurable et* $\phi : X \to Y$ *une fonction mesurable. On suppose que* $\phi_*\mu$ *est* σ*-finie. Alors :*

(i) *Pour toute fonction* $f : Y \to [0, +\infty]$ *mesurable, on a :*

$$\int_Y f\, \mathrm{d}(\phi_*\mu) = \int_X (f \circ \phi)\, \mathrm{d}\mu.$$

(ii) *Pour toute fonction* $f : Y \to \mathbb{K}$ *mesurable,* $f \in \mathcal{L}^1(Y, \mathcal{B}, \phi_*\mu)$ ssi $(f \circ \phi) \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$*. Dans ce cas,* $\int_Y f\, \mathrm{d}(\varphi_*\mu) = \int_X (f \circ \varphi)\, \mathrm{d}\mu$*.*

3.5.3 Changement de variable

Théorème 3.5.4. *On se place dans* $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \lambda)$*, où* λ *est la mesure de Lebesgue. Soit* Ω_1, Ω_2 *deux ouverts de* $\mathbb{R}$ *et* $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ *un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme. Alors :*

(i) *Pour toute fonction* $f : \Omega_2 \to [0, +\infty]$*, on a :*

$$\int_{\Omega_2} f\, \mathrm{d}\lambda = \int_{\Omega_1} (f \circ \varphi) \cdot |\varphi'|\, \mathrm{d}\lambda.$$

(ii) *Pour toute fonction* $f : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ *mesurable,* f *est sommable sur* Ω_2 ssi $(f \circ \varphi) \cdot |\varphi'|$ *est sommable sur* Ω_1*. Dans ce cas,* $\int_{\Omega_2} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\Omega_1} (f \circ \varphi) \cdot |\varphi'| \, \mathrm{d}\lambda$.

Remarque 3.5.5. *On peut généraliser le théorème 3.5.4 au cas où* Ω_1, Ω_2 *sont des ouverts de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ *est un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme. Il faut alors remplacer* $|\varphi'|$ *par* $|\mathrm{jac}\,\varphi|$*, où* $\mathrm{jac}\,\varphi$ *est le jacobien de* φ *(défini par* $\forall \omega \in \Omega_2,\ (\mathrm{jac}\,\varphi)(\omega) = \det(\mathrm{d}\varphi(\omega))$*).*

4 Espaces fonctionnels

4.1 Les inégalités de Hölder et de Minkowski

Théorème 4.1.1 (Inégalité de Hölder)**.** *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* φ, ψ *deux fonctions positives sommables sur* X*. Alors pour tout* $\theta \in]0,1[$*, la fonction* $\varphi^\theta \psi^{1-\theta}$ *est sommable et :*

$$\int_X \varphi^\theta \psi^{1-\theta} \, \mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu \right)^\theta \left(\int_X \psi \, \mathrm{d}\mu \right)^{1-\theta}.$$

Démonstration. Pour $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, la fonction $\theta \longmapsto a^\theta b^{1-\theta}$ est convexe, d'où $a^\theta b^{1-\theta} \leqslant \theta a + (1-\theta) b$. En notant $C = \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu$ et $D = \int_X \psi \, \mathrm{d}\mu$ et en appliquant l'inégalité précédente avec $a = \frac{\varphi}{C}$ et $b = \frac{\psi}{D}$, on obtient le résultat. □

Théorème 4.1.2 (Inégalité de Minkowski)**.** *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $p \in [1, +\infty[$*. Soit* $f, g : X \to \mathbb{K}$ *deux fonctions t.q.* f^p *et* g^p *sont sommables. Alors* $(f+g)^p$ *est sommable et :*

$$\left(\int_X |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. On note $h = |f| + |g|$. En appliquant l'inégalité de Hölder (théorème 4.1.1) avec $\theta = \frac{p-1}{p}$, $\varphi = h^p$ et $\psi = |f|^p$ (puis idem en remplaçant f par g), obtenir :

$$\int_X h^{p-1} |f| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int_X h^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \int_X h^{p-1} |g| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int_X h^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_X |g|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient $(\int_X h^p \, \mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int_X |g|^p \, \mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}}$, d'où le résultat car $|f+g|^p \leqslant h^p$. □

4.2 Les espaces L^p

Définition 4.2.1 (L^p)**.** *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $p \in [1, +\infty[$*. On définit :*

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{K} \text{ mesurable}, \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Et l'application*

$$\|\cdot\|_p : f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) \longmapsto \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une semi-norme. On considère :

$$F = \left\{ f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu), \ \|f\|_p = 0 \right\} = \{ f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu), \ f(x) = 0 \text{ pour presque tout } x \in X \}.$$

F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$*. Et on définit :*

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) / F.$$

Autrement dit, on identifie les fonctions égales presque-partout. On définit alors $\|\cdot\|_p$ *sur* $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ *de manière naturelle. Ainsi,* $\left(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p\right)$ *est un espace vectoriel normé. Par la suite, on notera parfois* $\mathcal{L}^p$ *et* L^p *plutôt que* $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ *et* $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ *lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. De plus, une fonction de* $\mathcal{L}^p$ *sera identifiée à sa classe dans* L^p*.*

Théorème 4.2.2 (Théorème de Riesz-Fischer)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors L^p est un espace de Banach.*

Démonstration. Il suffit de prouver que toute série absolument convergente à valeurs dans L^p est convergente. Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (L^p)^{\mathbb{N}}$ t.q. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_p < +\infty$. On considère $g : x \in X \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n(x)| \in [0, +\infty]$ et $g_N : x \in X \longmapsto \sum_{n=0}^{N} |u_n(x)| \in [0, +\infty]$ pour $N \in \mathbb{N}$. Comme $g_N^p \xrightarrow[N\to+\infty]{} g^p$, le lemme de Fatou (théorème 3.2.12) fournit :

$$\|g\|_p = \left(\int_X \left(\liminf_{N\to+\infty} g_N^p\right) \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\liminf_{N\to+\infty} \left(\int_X g_N^p \,\mathrm{d}\mu\right)\right)^{\frac{1}{p}} = \liminf_{N\to+\infty} \|g_N\|_p \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_p < +\infty.$$

Donc $g \in L^p$. En particulier, la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente (donc convergente) pour presque tout $x \in X$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ (qui est définie presque-partout). Alors $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$ presque-partout et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|S_n|^p \leqslant g^p$. Par le théorème de convergence dominée (théorème 3.3.8), il vient $\|S_n - S\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc la série $\sum u_n$ converge au sens de L^p. ☐

Corollaire 4.2.3. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (L^p)^{\mathbb{N}}$ et $f \in L^p$ t.q. $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ (au sens de L^p). Alors on peut extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(f_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $f_{\varphi(n)}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ pour presque tout $x \in X$.*

Démonstration. On choisit φ une extractrice t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\right\|_p \leqslant 2^{-n}$, et on note $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\right|$. On a $\|g\|_p \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\right\|_p < +\infty$. En particulier, $g(x) < +\infty$ pour presque tout $x \in X$. Donc la série $\sum \left(f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)\right)$ converge absolument donc converge pour presque tout $x \in X$. Donc il existe $\ell : X \to \mathbb{K}$ t.q. $f_{\varphi(n)}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell(x)$ pour presque tout $x \in X$. Montrer ensuite que $\ell \in L^p$ et $\|f_n - \ell\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où $\ell(x) = f(x)$ pour presque tout $x \in X$. ☐

Lemme 4.2.4. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $p \in [1, +\infty[$. On note S l'ensemble des fonctions φ réelles simples (i.e. mesurables et d'image finie) vérifiant $\mu\left(\varphi^{-1}\left(\mathbb{K}^*\right)\right) < +\infty$. Alors S est dense dans L^p.*

Théorème 4.2.5. *Soit $p \in [1, +\infty[$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On se place dans $(\Omega, \mathrm{Bor}\,(\Omega), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue. On note $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact $\Omega \to \mathbb{K}$. Alors $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ est dense dans L^p.*

Démonstration. Notons d'abord que $\mathcal{C}_c^0(\Omega) \subset L^p$. Selon le lemme 4.2.4, il suffit de prouver que $S \subset \overline{\mathcal{C}_c^0(\Omega)}$. Pour cela, il suffit de montrer que $\forall A \in \mathrm{Bor}(\Omega)$, $\lambda(A) < +\infty \implies \mathbb{1}_A \in \overline{\mathcal{C}_c^0(\Omega)}$. Soit donc $A \in \mathrm{Bor}\,(\Omega)$ avec $\lambda(A) < +\infty$. Avec la proposition 2.4.8, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe un compact K_N et un ouvert U_N t.q. $K_N \subset A \subset U_N$ et $\lambda\left(U_N \backslash K_N\right) \leqslant \frac{1}{N}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note $\delta_N = d\left(K_N, \Omega \backslash U_N\right) > 0$ et on pose :

$$f_N : x \in \Omega \longmapsto \max\left(0, 1 - \frac{d\left(x, K_N\right)}{\delta_N}\right).$$

On a alors $\left(f_N\right)_{N\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)^{\mathbb{N}}$ et :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{1}_{K_N} \leqslant f_N \leqslant \mathbb{1}_{U_N}.$$

On en déduit $\|f_N - \mathbb{1}_A\|_p \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, d'où $\mathbb{1}_A \in \overline{\mathcal{C}_c^0(\Omega)}$. ☐

4.3 L'espace L^2

Définition 4.3.1 (Structure préhilbertienne de L^2)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On munit L^2 du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ défini par :*

$$\forall (f,g) \in \left(L^2\right)^2, \ \langle f \mid g \rangle = \int_X f\overline{g} \ \mathrm{d}\mu.$$

Ainsi, L^2 est un espace préhilbertien, et la norme préhilbertienne est exactement $\|\cdot\|_2$.

Théorème 4.3.2. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Alors L^2 est un espace de Hilbert.*

4.4 L'espace L^∞

Définition 4.4.1 (Presque majorant)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f : X \to \mathbb{R}$. On dit qu'un réel $M \in \mathbb{R}$ est un* presque majorant *de f lorsque $f(x) \leqslant M$ pour presque tout $x \in X$.*

Définition 4.4.2 (L^∞)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On définit :*

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ mesurable, } |f| \text{ admet un presque majorant}\}.$$

$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour $f \in \mathcal{L}^\infty(X, A, \mu)$, on note $\|f\|_\infty$ le plus petit presque majorant de f. Ainsi $\|\cdot\|_\infty$ est une semi-norme. On considère $F = \{f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu), \ \|f\|_\infty = 0\}$, et on définit :

$$L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) / F.$$

On définit alors $\|\cdot\|_\infty$ sur $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ de manière naturelle. Ainsi, $(L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

Théorème 4.4.3. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Alors L^∞ est un espace de Banach.*

Remarque 4.4.4. *Le théorème 4.2.5 et le lemme 4.2.4 sont faux pour $p = \infty$.*

4.5 Dualité

Définition 4.5.1 (Réels conjugués)**.** *Soit $(p,q) \in [1, +\infty]^2$. On dit que p et q sont* conjugués *lorsque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Théorème 4.5.2. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(p,q) \in [1, +\infty]^2$ un couple de réels conjugués.*

(i) *Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, alors $(fg) \in L^1$ et :*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

(ii) *Si $f \in L^p$, alors :*

$$\|f\|_p = \sup_{g \in L_q \setminus \{0\}} \frac{\left|\int_X fg \ \mathrm{d}\mu\right|}{\|g\|_q}.$$

Corollaire 4.5.3. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(p,q) \in [1, +\infty]^2$ un couple de réels conjugués. On note $(L^p)' = \mathcal{L}_\mathcal{C}(L^p, \mathbb{K})$ le dual topologique de L^p. On considère :*

$$\Psi : \left| \begin{array}{l} L^p \longrightarrow (L^q)' \\ f \longmapsto \left| \begin{array}{l} L^q \longrightarrow \mathbb{K} \\ g \longmapsto \int_X fg \ \mathrm{d}\mu \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Alors Ψ est une isométrie linéaire injective. Et, si $p \in]1, +\infty[$, on peut montrer que Ψ est bijective.

4.6 Liens entre les espaces L^p

Proposition 4.6.1. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $1 \leqslant p < s < q \leqslant +\infty$. Alors :*

$$L^p \cap L^q \subset L^s.$$

Proposition 4.6.2. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Si $\mu(X) < +\infty$, alors pour tout $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$, on a $L^p \supset L^q$.*

5 Espaces de Hilbert

5.1 Théorème de Radon-Nikodym

Définition 5.1.1 (Mesure admettant une densité)**.** *Soit μ et ν deux mesures sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. On dit que ν* admet une densité *par rapport à μ lorsqu'il existe $\rho : X \to [0, +\infty]$ mesurable t.q.*

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \nu(A) = \int_A \rho \ \mathrm{d}\mu.$$

Lemme 5.1.2. *Soit μ et ν deux mesures finies sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. On suppose que :*

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \nu(A) \leqslant \mu(A).$$

Alors ν admet une densité ρ par rapport à μ. De plus, on a $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ presque-partout.

Démonstration. Montrer d'abord que, pour toute fonction $f : X \to [0, +\infty]$ mesurable, $\int_X f \ \mathrm{d}\nu \leqslant \int_X f \ \mathrm{d}\mu$ (le montrer pour les fonctions simples, puis pour les fonctions mesurables par passage à la limite). On se place maintenant dans l'espace $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Notons que $L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L^2(X, \mathcal{A}, \nu) \subset L^1(X, \mathcal{A}, \nu)$ (car $\nu(X) < +\infty$). On considère donc :

$$\ell : \left| \begin{array}{rcl} L^2(X, \mathcal{A}, \mu) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_X f \ \mathrm{d}\nu \end{array} \right. .$$

$\ell \in \mathcal{L}(L^2(X, \mathcal{A}, \mu), \mathbb{K})$. Et on a :

$$\forall f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu),\ |\ell(f)| \leqslant \int_X |f| \ \mathrm{d}\nu \leqslant \int_X |f| \ \mathrm{d}\mu \leqslant \sqrt{\int_X |f|^2 \ \mathrm{d}\mu} \cdot \sqrt{\int_X 1 \ \mathrm{d}\mu} = \sqrt{\mu(X)}\, \|f\|_2 .$$

Donc $\ell \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(L^2(X, \mathcal{A}, \mu), \mathbb{K})$. Selon le théorème de Riesz, comme $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert, il existe $\rho \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ t.q. $\ell = \langle \cdot \mid \rho \rangle$. On montre alors que $\rho(x) \in [0, +\infty]$ pour presque tout $x \in X$. Ainsi, ν est de densité ρ par rapport à μ (car $\forall A \in \mathcal{A},\ \nu(A) = \ell(\mathbb{1}_A) = \langle \mathbb{1}_A \mid \rho \rangle = \int_A \rho \ \mathrm{d}\mu$). De plus, on montre aisément que $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ presque partout. □

Théorème 5.1.3 (Théorème de Radon-Nikodym)**.** *Soit μ et ν deux mesures σ-finies sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. S'équivalent :*

(i) *ν admet une densité par rapport à μ.*

(ii) $\forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Clair. (ii) $\Rightarrow$ (i) *Première étape* : $\mu(X) < +\infty$ et $\nu(X) < +\infty$. On note alors $\theta = \mu + \nu$. Alors θ est une mesure finie sur $(X, \mathcal{A})$ et on a $\mu \leqslant \theta$ et $\nu \leqslant \theta$. Selon le lemme 5.1.2, il existe $(g, h) \in L^2(X, \mathcal{A}, \theta)^2$ t.q.

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = \int_X g \ \mathrm{d}\theta \ \text{ et } \ \nu(A) = \int_X h \ \mathrm{d}\theta.$$

On pose alors $N = g^{-1}(\{0\})$. On a $\mu(N) = \int_N g \, \mathrm{d}\theta = 0$, donc par hypothèse, $\nu(N) = 0$. On définit donc :

$$\rho : x \in X \longmapsto \begin{cases} \frac{h(x)}{g(x)} & \text{si } x \notin N \\ 0 & \text{si } x \in N \end{cases}.$$

On a ainsi $\forall A \in \mathcal{A},\ \nu(A) = \int_A \rho \, \mathrm{d}\mu$, ce qui prouve le résultat dans le cas particulier où μ et ν sont finies. *Deuxième étape.* Soit $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite croissante t.q. $X = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} X_p$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ \mu(X_p) < +\infty$ et $\nu(X_p) < +\infty$. D'après la première étape, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $\rho_p : X_p \to [0, +\infty]$ mesurable t.q. $\forall A \in \mathcal{A},\ A \subset X_p \Longrightarrow \nu(A) = \int_A \rho_p \, \mathrm{d}\mu$. Montrer maintenant que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \mu\left(\{x \in X_p,\ \rho_{p+1}(x) \neq \rho_p(x)\}\right) = 0.$$

On peut donc poser une fonction $\rho : X \to [0, +\infty]$ vérifiant pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\rho_{|X_p} = \rho_p$ presque-partout. Ainsi, ν est de densité ρ par rapport à μ. □

5.2 Bases hilbertiennes

Définition 5.2.1 (Partie totale)**.** *Soit H un espace de Hilbert, $A \subset H$. S'équivalent :*

(i) *$H = \overline{\mathrm{Vect}(A)}$.*

(ii) *$A^\perp = \{0\}$.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que A est une partie totale *de H.*

Exemple 5.2.2. *Soit X un ensemble, $\mathcal{A}$ une algèbre sur X, μ une mesure finie sur $(X, \sigma(\mathcal{A}))$. Alors $\{\mathbb{1}_A,\ A \in \mathcal{A}\}$ est une partie totale de $L^2(X, \sigma(\mathcal{A}), \mu)$.*

Démonstration. On note $C = \{\mathbb{1}_A,\ A \in \mathcal{A}\}$. Soit $f \in C^\perp$. On écrit $f = f^+ - f^-$. Soit μ^+ la mesure de densité f^+ par rapport à μ, μ^- la mesure de densité f^- par rapport à μ. On vérifie que :

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \mu^+(A) = \mu^-(A).$$

Il vient, d'après l'unicité dans le théorème de Carathéodory (théorème 2.7.9) : $\forall A \in \sigma(\mathcal{A}),\ \mu^+(A) = \mu^-(A)$, i.e. $\mu^+ = \mu^-$. Ainsi :

$$\forall A \in \sigma(\mathcal{A}),\ \int_A f^+ \, \mathrm{d}\mu = \int_A f^- \, \mathrm{d}\mu.$$

On considère alors $A^+ = f^{-1}([0, +\infty[)$ et $A^- = f^{-1}(]-\infty, 0])$. Comme $\int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu = \int_{A^+} f^+ \, \mathrm{d}\mu = \int_{A^+} f^- \, \mathrm{d}\mu = 0$, et $f^+ \geqslant 0$, il vient $f^+ = 0$ presque-partout. De même, $f^- = 0$ presque-partout, donc $f = 0$ presque-partout. Ceci prouve que $C^\perp = \{0\}$. □

Définition 5.2.3 (Espace séparable)**.** *Un espace de Hilbert est dit* séparable *lorsqu'il admet une partie totale dénombrable.*

Définition 5.2.4 (Base hilbertienne)**.** *Soit H un espace de Hilbert. On appelle* base hilbertienne *de H toute famille totale et orthonormale.*

Théorème 5.2.5. *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable.*

Théorème 5.2.6. *Soit H un espace de Hilbert, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.*

(i) *Pour tout $x \in H$, il existe une unique suite $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ t.q.*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) e_n.$$

*Et on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(x) = \langle x \mid e_n \rangle$. De plus, on a l'*identité de Bessel-Parseval *:*

$$\|x\| = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x \mid e_n \rangle|^2.$$

(ii) *Réciproquement, si* $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *vérifie* $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_n|^2 < +\infty$*, alors la série* $\sum \gamma_n e_n$ *converge dans* H *vers un élément* x*. Et on a alors* $\forall n \in \mathbb{N},\ \gamma_n = \langle x \mid e_n\rangle$*.*

Démonstration. (i) Pour $n \in \mathbb{N}$, poser $f_n = \sum_{k=0}^{n} \langle f \mid e_k\rangle e_k$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge vers un $g \in H$ (car H est complet). Montrer ensuite que $\forall n \in \mathbb{N},\ \langle g - f \mid e_n\rangle = 0$, donc $(g - f) \in \{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \{0\}$, d'où $g = f$. L'unicité et l'identité de Bessel-Parseval sont claires. (ii) Pour $n \in \mathbb{N}$, poser $f_n = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k e_k$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et en déduire le résultat. $\square$

5.3 Exemples classiques de bases hilbertiennes

Exemple 5.3.1 (Système de Haar)**.** *On se place dans* $([0,1], \mathrm{Bor}([0,1]), \lambda)$*. On définit une suite* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (L^2)^{\mathbb{N}^*}$ *par* $h_1 = 1$ *et :*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall \ell \in [\![1, 2^k]\!]\ ,\ h_{2^k+\ell} = 2^{\frac{k}{2}} \left(\mathbb{1}_{\left[\frac{2\ell-2}{2^{k+1}}, \frac{2\ell-1}{2^{k+1}}\right]} - \mathbb{1}_{\left[\frac{2\ell-1}{2^{k+1}}, \frac{2\ell}{2^{k+1}}\right]} \right).$$

Alors $(h_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *est une base hilbertienne de* L^2*.*

Remarque 5.3.2. *On peut aussi voir le système de Haar dans* $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathrm{Bor}([0,1]^n), P\right)$*. Pour cela, on pose* $p_n : u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longmapsto (u_0, \ldots, u_n) \in \{0,1\}^{n+1}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$*. On note* $J = \{0\} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{0,1\}^n)$*, et on définit* $(H_j)_{j\in J}$ *par* $H_0 = 1$ *et :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall s \in \{0,1\}^n,\ H_j = 2^{\frac{k}{2}} \left(\mathbb{1}_{p_n^{-1}(\{(s_0,\ldots,s_n,0)\})} - \mathbb{1}_{p_n^{-1}(\{(s_0,\ldots,s_n,1)\})} \right).$$

Alors $(H_j)_{j\in J}$ *est une base hilbertienne de* L^2*.*

Exemple 5.3.3 (Quelques bases hilbertiennes de polynômes)**.**

(i) Polynômes de Legendre*. On se place sur un segment* $[a,b]$*. Pour* $n \in \mathbb{N}$*, on définit* $P_n \in \mathbb{R}[X]$ *par :*

$$\forall x \in [a,b],\ P_n(x) = c_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(\left(1 - x^2\right)^n \right),$$

où c_n *est une constante choisie t.q.* $\|P_n\|_2 = 1$*. Alors* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base hilbertienne de* L^2*.*

(ii) Polynômes de Laguerre*. On se place sur* $\mathbb{R}_+$*. Pour* $n \in \mathbb{N}$*, on définit* $L_n \in \mathbb{R}[X]$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(e^{-x} x^n \right).$$

Alors $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base hilbertienne de* L^2*.*

5.4 Séries de Fourier

Notation 5.4.1. *On se place sur un segment* $[a,b] \subset \mathbb{R}$*, avec* $a < b$*. On note* $\omega = \frac{2\pi}{b-a}$ *et on munit* L^2 *du produit scalaire* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *défini par :*

$$\forall (f,g) \in \left(L^2\right)^2,\ \langle f \mid g\rangle = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f\overline{g}\ \mathrm{d}\lambda.$$

$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *n'est pas le produit scalaire canonique sur* L^2 *(c.f. définition 4.3.1) mais induit la structure hilbertienne canonique de* L^2*.*

Lemme 5.4.2. *Il existe une suite* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ *t.q.*

$$\forall t \in [-1,1],\ P_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{1}_{]0,1]}(t) - \mathbb{1}_{[-1,0[}(t),$$

et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [-1,1],\ |P_n(t)| \leqslant 1$*.*

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\alpha_n = \int_0^1 (1-s^2)^n \, \mathrm{d}s$. On définit $P_n \in \mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall t \in [-1,1]\,,\ P_n(t) = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^t \left(1-s^2\right)^n \, \mathrm{d}s.$$

Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convient. □

Théorème 5.4.3. *Pour $n \in \mathbb{Z}$, on considère :*

$$e_n : t \in [a,b] \longmapsto \exp(in\omega t)\,,$$

où $\omega = \frac{2\pi}{b-a}$. Alors $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de L^2.

Démonstration. On vérifie aisément que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale. Reste à prouver qu'elle est totale. Pour cela, soit $I \subset [a,b]$ un segment. Il suffit de prouver que $\mathbb{1}_I \in \overline{\mathrm{Vect}\,(e_n,\ n \in \mathbb{Z})}$. On écrit $I = [c-h, c+h]$ et on pose :

$$\varphi : t \in [a,b] \longmapsto \frac{1}{2}\left[\cos\left(\omega(t-c)\right) - \cos(\omega h)\right].$$

On a $\varphi \in \mathrm{Vect}\,(1, e_1, e_{-1})$. Et, pour $t \in [a,b]$, $\varphi(t) > 0$ si $t \in \mathring{I}$, $\varphi(t) < 0$ si $t \notin I$. Avec la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ du lemme 5.4.2, on en déduit que $\frac{1}{2}\left(1 + (P_n \circ \varphi)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{1}_I$ presque-partout. Par convergence dominée, on montre ensuite qu'on a convergence au sens de L^2, d'où $\mathbb{1}_I \in \overline{\mathrm{Vect}\,(e_n,\ n \in \mathbb{Z})}$. □

Corollaire 5.4.4.

(i) *Pour tout $f \in L^2$, il existe une unique suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ t.q.*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n \quad \textit{au sens de } L^2.$$

Et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n(f) = \langle f \mid e_n \rangle$. De plus :

$$\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} |f|^2 \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2\,.$$

(ii) *Réciproquement, si $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifie $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_n|^2 < +\infty$, alors la série $\sum \gamma_n e_n$ converge dans L^2 vers un élément f. Et on a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n = \langle f \mid e_n \rangle$.*

Démonstration. Appliquer le théorème 5.4.3 et le théorème 5.2.6. □

Remarque 5.4.5. *Le corollaire 5.4.4 fournit une écriture de f comme série de fonctions au sens de L^2, mais on ne sait pas* a priori *si la série converge simplement.*

5.5 Théorème de Radon

Définition 5.5.1 (Forme linéaire positive)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une forme linéaire $I : \mathcal{C}_c^0(\Omega) \to \mathbb{K}$ est dite* positive *lorsque :*

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)\,,\ f \geqslant 0 \Longrightarrow I(f) \geqslant 0.$$

Remarque 5.5.2. *Toute forme linéaire positive est continue.*

Notation 5.5.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Étant donnée une mesure μ sur $(\Omega, \mathrm{Bor}(\Omega))$, on définit :*

$$I_\mu : \left| \begin{array}{l} \mathcal{C}_c^0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K} \\ \qquad f \longmapsto \displaystyle\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \end{array} \right. .$$

Alors I_μ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$.

Théorème 5.5.4 (Théorème de Radon)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors l'application $\mu \longmapsto I_\mu$ définit une bijection entre les mesures sur $(\Omega, \mathrm{Bor}(\Omega))$ et les formes linéaires positives sur $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$.*

5.6 Mesures signées

Définition 5.6.1 (Mesure signée)**.** *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une application $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ est appelée* mesure signée *sur $(X, \mathcal{A})$ lorsqu'il existe deux mesures (positives) μ_1, μ_2 t.q. $\nu = \mu_1 - \mu_2$.*

Définition 5.6.2 (Intégrale selon une mesure signée)**.** *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Si ν est une mesure signée sur $(X, \mathcal{A})$, on définit, pour $f : X \to [0, +\infty]$:*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\nu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu_1 - \int_X f \, \mathrm{d}\mu_2,$$

où (μ_1, μ_2) est un couple quelconque de mesures (positives) sur $(X, \mathcal{A})$ t.q. $\nu = \mu_1 - \mu_2$.

Notation 5.6.3. *Soit K un espace topologique compact. On munit $\mathcal{C}^0(K)$ de $\|\cdot\|_\infty$ et on note $\mathcal{C}^0(K)^* = \mathcal{L}_\mathcal{C}\left(\mathcal{C}^0(K), \mathbb{R}\right)$.*

Proposition 5.6.4. *Soit K un espace topologique compact. Si ℓ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}^0(K)$, alors ℓ est continue, et $\|\ell\| = \ell(1)$.*

Proposition 5.6.5. *Soit K un espace topologique compact. Si $\ell \in \mathcal{C}^0(K)^*$, alors il existe deux formes linéaires positives ℓ^+, ℓ^- sur $\mathcal{C}^0(K)$ t.q.*

(i) *$\ell = \ell^+ - \ell^-$,*

(ii) *$\|\ell\| = \|\ell^+\| + \|\ell^-\|$.*

Démonstration. *Première étape.* Étant donné $f \in \mathcal{C}^0(K)$, $f \geqslant 0$, on pose :

$$\ell^+(f) = \sup_{\substack{u \in \mathcal{C}^0(K) \\ 0 \leqslant u \leqslant f}} \ell(u).$$

Montrer d'abord que si $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}^0(K)^2$, avec $f_1 \geqslant 0$ et $f_2 \geqslant 0$, alors $\ell^+(f_1 + f_2) = \ell^+(f_1) + \ell^+(f_2)$. *Deuxième étape.* Étant donné $f \in \mathcal{C}^0(K)$, il existe $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}^0(K)^2$, avec $f_1 \geqslant 0$ et $f_2 \geqslant 0$ t.q. $f = f_1 - f_2$. On pose alors $\ell^+(f) = \ell^+(f_1) - \ell^+(f_2)$, indépendamment du choix de (f_1, f_2). Il est alors clair que ℓ^+ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}^0(K)$. *Troisième étape.* On pose $\ell^- = \ell^+ - \ell$, qui est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}^0(K)$, et qui vérifie $\ell = \ell^+ - \ell^-$. On a en fait, pour $f \geqslant 0$:

$$\ell^-(f) = \sup_{\substack{v \in \mathcal{C}^0(K) \\ -f \leqslant v \leqslant 0}} \ell(v).$$

Quatrième étape. Montrons que $\|\ell\| = \|\ell^+\| + \|\ell^-\|$. On a $\|\ell^+\| = \ell^+(1)$ et $\|\ell^-\| = \ell^-(1)$. Il existe donc des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0(K)^\mathbb{N}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0(K)^\mathbb{N}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$ t.q.

$$\left\|\ell^+\right\| = \lim_{n\to+\infty} \ell(u_n) \qquad \text{et} \qquad \left\|\ell^-\right\| = \lim_{n\to+\infty} \ell(v_n).$$

Notons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell(u_n) = \ell^+(u_n) - \ell^-(u_n) \leqslant \ell^+(1) - \ell^-(u_n)$. En faisant tendre $n \to +\infty$, on voit que $\ell^-(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $\|\ell^+\| = \lim_{n\to+\infty} \ell^+(u_n)$. Idem pour ℓ^-. Ainsi, comme $\|u_n - v_n\|_\infty \leqslant 1$:

$$\left\|\ell^+\right\| + \left\|\ell^-\right\| = \lim_{n\to+\infty} \left(\ell^+(u_n) + \ell^-(v_n)\right) = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\ell(u_n - v_n)}_{\leqslant \frac{\ell(u_n - v_n)}{\|u_n - v_n\|_\infty} \leqslant \|\ell\|} \leqslant \|\ell\|.$$

L'autre inégalité est claire. □

Théorème 5.6.6. *Soit K un espace topologique compact. Soit $\ell \in \mathcal{C}^0(K)^*$. Alors il existe une mesure signée ν sur $(K, \mathrm{Bor}(K))$ t.q.*

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(K),\ \ell(f) = \int_X f \, \mathrm{d}\nu.$$

On peut de plus choisir des mesures (positives) μ_1, μ_2 sur $(K, \mathrm{Bor}(K))$ t.q. $\nu = \mu_1 - \mu_2$ et $\|\ell\| = \mu_1(X) + \mu_2(X)$.

Définition 5.6.7 (Mesures étrangères). *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Deux mesures (positives) μ_1, μ_2 sur $(X, \mathcal{A})$ sont dites* étrangères *s'il existe $A \in \mathcal{A}$ t.q. $\mu_1(X \backslash A) = 0$ et $\mu_2(A) = 0$.*

Exemple 5.6.8. *Sur $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$, la mesure de Dirac en 0 et la mesure de Lebesgue sont étrangères.*

Théorème 5.6.9. *Soit K un espace topologique compact.*

(i) *$\mathcal{C}^0(K)^*$ est en bijection avec l'ensemble des mesures signées sur $(K, \mathrm{Bor}(K))$.*

(ii) *Toute mesure signée sur $(K, \mathrm{Bor}(K))$ peut s'écrire comme différence de deux mesures boréliennes étrangères.*

5.7 Séries de Fourier – convergence ponctuelle

Théorème 5.7.1 (Théorème de Dirichlet). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique $\mathcal{C}^1_{pm}$ (mais pas nécessairement $\mathcal{C}^0$). Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, \mathrm{d}t$. Alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} = \frac{1}{2} \left(\lim_{x^+} f + \lim_{x^-} f \right).$$

Démonstration. On peut se ramener au cas où $x = 0$. On suppose d'abord f continue en 0. Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose :

$$D_N : t \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{|n| \leqslant N} e^{int} = \begin{cases} \frac{\sin\left([2N+1]\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \not\equiv 0 \quad [2\pi] \\ 2N+1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On pose de plus $P_N f : t \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{|n| \leqslant N} c_n(f) e^{int}$. Ainsi :

$$P_N f(0) - f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(t) - f(0)\right) D_N(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(t) - f(0)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \sin\left([2N+1]\frac{t}{2}\right) \, \mathrm{d}t.$$

Avec cette expression, montrer que $P_N f(0) - f(0) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$, d'où le résultat si f est continue en 0. Sinon, poser :

$$f_p : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) & \text{si } x \not\equiv 0 \quad [2\pi] \\ \frac{1}{2}\left(\lim_{0^+} f + \lim_{0^-} f\right) & \text{sinon} \end{cases},$$

$$f_i : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) & \text{si } x \not\equiv 0 \quad [2\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors f_p est continue en 0, f_i est impaire et $f = f_p + f_i$ presque-partout, ce qui permet d'obtenir le résultat. $\square$

Références

[1] P. Malliavin. *Intégration et probabilités.*

[2] W. Rudin. *Real and complex analysis.*