Géométrie Différentielle

Cours de Olivier Druet
Notes de Alexis Marchand

ENS de Lyon
S2 2018-2019
Niveau M1

Table des matières

1 Théorie locale des surfaces

1.1 Courbes planes

Définition 1.1.1 (Courbure d'une courbe plane)**.** *Soit* $c : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ *une courbe plane paramétrée par longueur d'arc. Pour* $t \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$*, on définit :*

- *Le* vecteur tangent unitaire $\vec{T}(t)$ *en* $c(t)$ *:* $\vec{T}(t) = c'(t)$.
- *Le* vecteur normal unitaire $\vec{N}(t)$ *en* $c(t)$*, tel que* $\left(\vec{T}(t), \vec{N}(t)\right)$ *est une base orthonormée directe de* $\mathbb{R}^2$.
- *La* courbure $k(t)$ *en* $c(t)$*, telle que :*

$$\vec{T}'(t) = k(t)\vec{N}(t) \qquad ou \qquad \vec{N}'(t) = -k(t)\vec{T}(t).$$

  Autrement dit $k(t) = \left\langle c''(t), \vec{N}(t) \right\rangle$ *et* $|k(t)| = \|c''(t)\|$.

Remarque 1.1.2. *La courbure a un signe qui dépend de l'orientation de la courbe c. Par contre, la valeur absolue de la courbure ne dépend que de l'image de c.*

Remarque 1.1.3. *Soit* $c : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ *une courbe plane paramétrée par longueur d'arc. Pour tous* $t_1, t_2, t_3 \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ *deux à deux distincts, on note* $\mathscr{C}(t_1, t_2, t_3)$ *l'unique cercle (ou droite) passant par* $c(t_1)$*,* $c(t_2)$ *et* $c(t_3)$*, et on note* $R(t_1, t_2, t_3)$ *son rayon. Alors, lorsque* $t_1, t_2, t_3 \to t$*,* $\mathscr{C}(t_1, t_2, t_3)$ *converge vers un cercle noté* $\mathscr{C}(t)$ *et appelé* cercle osculateur *en* $c(t)$*. Le rayon de* $\mathscr{C}(t)$ *est la limite de* $R(t_1, t_2, t_3)$ *lorsque* $t_1, t_2, t_3 \to t$ *; il est égal à* $\frac{1}{|k(t)|}$.

Remarque 1.1.4. *Soit* $c : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ *une courbe plane paramétrée par longueur d'arc. Soit* $t \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ *t.q.* $k'(t) \neq 0$*. Alors il existe un voisinage* V *de* t *dans* $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ *t.q. pour tous* $s_1 \neq s_2$ *dans* V*, on a* $\mathscr{C}(s_1) \cap \mathscr{C}(s_2) = \varnothing$.

1.2 Préhistoire de la théorie des surfaces

Notation 1.2.1. *On considère une surface* $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$*. Pour* $p \in \Sigma$*, on note* $T_p\Sigma$ *le plan tangent à* Σ *et* ν *un vecteur unitaire orthogonal à* $T_p\Sigma$*. Pour* $x \in T_p\Sigma$ *avec* $\|x\| = 1$*, l'ensemble* $\Sigma \cap \mathrm{Vect}(\nu, x)$ *est une courbe plane, dont la courbure en p sera notée* K_x *(qui est égale à* K_{-x}*).*

Théorème 1.2.2 (Euler, 1760)**.** *On considère une surface* $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ *et un point* $p \in \Sigma$*. On suppose que les* K_x *ne sont pas tous égaux. Alors il existe une unique direction* $\pm x_1$ *minimisant* K_{x_1} *et une unique direction* $\pm x_2$ *maximisant* K_{x_2}*. De plus,* $x_1 \perp x_2$*, et pour tout* $x \in T_p\Sigma$ *avec* $\|x\| = 1$*, si* $\langle x, x_1 \rangle = \cos\theta$*, alors :*

$$K_{x_1} \leq K_x = K_{x_1}\cos^2\theta + K_{x_2}\sin^2\theta \leq K_{x_2}.$$

1.3 Première forme fondamentale d'une surface

Vocabulaire 1.3.1. *On appelera* surface Σ *toute sous-variété de dimension* 2 *de* $\mathbb{R}^3$*. Localement,* Σ *est l'image d'un* paramétrage local $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$*, avec* Ω *ouvert de* $\mathbb{R}^2$*. Étant donné un tel paramétrage, si* $p = u(x, y) \in \Sigma$*, l'*espace tangent *à* Σ *en p est donné par :*

$$T_p\Sigma = \mathrm{Vect}(u_x, u_y),$$

avec $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ *et* $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$.

Définition 1.3.2 (Première forme fondamentale)**.** *Soit* Σ *une surface et* $p \in \Sigma$*. La* première forme fondamentale *en p est définie par :*

$$\mathrm{I}_p : (x, y) \in T_p\Sigma^2 \longmapsto \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}.$$

L'application I_p *est un produit scalaire sur* $T_p\Sigma$ *; il sera aussi noté* $g(p)$.

Proposition 1.3.3. *Soit Σ une surface et $p \in \Sigma$. Si u est un paramétrage local de Σ en p, alors la matrice de $g(p)$ dans la base (u_x, u_y) est $\begin{pmatrix} \|u_x\|^2 & \langle u_x, u_y \rangle \\ \langle u_x, u_y \rangle & \|u_y\|^2 \end{pmatrix}$. Cette matrice sera notée $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$.*

Définition 1.3.4 (Longueur d'une courbe)**.** *Soit Σ une surface. Si $\gamma : [0,1] \to \Sigma$ est un chemin $\mathcal{C}^1_{pm}$, alors la* longueur *de γ est donnée par :*

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{g(\gamma(t))(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, \mathrm{d}t.$$

Proposition 1.3.5. *Soit Σ une surface. Pour $p, q \in \Sigma$, on définit $\Gamma_{(p,q)}$ comme l'ensemble des chemins $\mathcal{C}^1_{pm}$ de p à q dans Σ. On définit alors :*

$$d_g(p,q) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{(p,q)}} \ell(\gamma).$$

Alors (Σ, d_g) est un espace métrique.

Définition 1.3.6 (Isométrie riemannienne)**.** *Soit Σ_1, Σ_2 deux surfaces. On dit qu'un difféomorphisme (lisse) $\varphi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ est une* isométrie riemannienne *lorsque $\varphi^* g_2 = g_1$. Autrement dit :*

$$\forall p \in \Sigma_1,\ \forall (x,y) \in T_p\Sigma_1^2,\ g_1(p)(x,y) = g_2(\varphi(p))(\mathrm{d}\varphi_p(x), \mathrm{d}\varphi_p(y)).$$

Dans ce cas, pour tout chemin $\mathcal{C}^1_{pm}$ $\gamma : [0,1] \to \Sigma_1$, on a $\ell_1(\gamma) = \ell_2(\varphi \circ \gamma)$. En particulier, $\varphi : (\Sigma_1, d_{g_1}) \to (\Sigma_2, d_{g_2})$ est une isométrie. Par contre, $\varphi : (\Sigma_1, d_{\mathbb{R}^3}) \to (\Sigma_2, d_{\mathbb{R}^3})$ n'est pas nécessairement une isométrie (par exemple, un plan et un cylindre sont localement isométriques au sens riemannien, mais pas au sens de la métrique de $\mathbb{R}^3$).

Théorème 1.3.7 (Myers–Steenrod, 1939)**.** *Soit Σ_1, Σ_2 deux surfaces. Alors toute isométrie (bijective) $\varphi : (\Sigma_1, d_{g_1}) \to (\Sigma_2, d_{g_2})$ au sens des espaces métriques est aussi une isométrie riemannienne.*

Démonstration. Voir Théorème 3.3.1. □

Définition 1.3.8 (Aire d'un domaine)**.** *Soit Σ une surface. Soit $A \subseteq \Sigma$ t.q. il existe un paramétrage local $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ de Σ t.q. $A = u(A')$ pour $A' \subseteq \Omega$. Alors l'*aire *de A est définie par :*

$$\mathcal{A}(A) = \int_{A'} \|u_x \wedge u_y\|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{A'} \sqrt{\det g(u(x,y))}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Cette définition est indépendante du choix de u.

1.4 Application de Gauß et seconde forme fondamentale

Définition 1.4.1 (Application de Gauß)**.** *Soit Σ une surface. On dit qu'une application $\nu : \Sigma \to \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ est une* application de Gauß *de Σ lorsque :*

$$\forall p \in \Sigma,\ \nu(p) \in T_p\Sigma^\perp.$$

Si u est un paramétrage local, alors on a une application de Gauß locale canonique donnée par :

$$\nu(u(x,y)) = \frac{u_x \wedge u_y}{\|u_x \wedge u_y\|}.$$

Définition 1.4.2 (Seconde forme fondamentale)**.** *Soit Σ une surface et $p \in \Sigma$. Alors $\mathrm{d}\nu_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$, et on définit la* seconde forme fondamentale *en p par :*

$$\mathrm{II}_p : (x,y) \in T_p\Sigma^2 \longmapsto -\langle \mathrm{d}\nu_p(x), y \rangle \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.4.3. *Soit* Σ *une surface et* $p \in \Sigma$*. On reprend la Notation 1.2.1. Pour* $x \in T_p\Sigma$ *avec* $\|x\| = 1$*, soit* $c : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to \Sigma$ *une courbe plane paramétrée par longueur d'arc avec* $c(0) = p$ *et* $c'(0) = x$*. Ainsi,* c *est un paramétrage local de* $\Sigma \cap \mathrm{Vect}\,(\nu, x)$*. En dérivant l'égalité* $\langle c'(t), \nu \circ c(t)\rangle = 0$ *et en appliquant en* $t = 0$*, on obtient :*

$$K_x = \langle c''(0), \nu\rangle = \mathrm{II}_p\,(x, x)\,.$$

Le Théorème d'Euler (Théorème 1.2.2) est donc une conséquence du fait que II_p *est une forme bilinéaire symétrique.*

Théorème 1.4.4 (Gauß, 1827)**.** *Soit* Σ *une surface et* $p \in \Sigma$*. Alors* II_p *est une forme bilinéaire symétrique.*

Démonstration. Soit u un paramétrage local en p. Il s'agit de prouver que $\langle \mathrm{d}\nu_p\,(u_x)\,, u_y\rangle = \langle \mathrm{d}\nu_p\,(u_y)\,, u_x\rangle$. Pour cela, on note $n = \nu \circ u$. Alors :

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{d}\nu_p\,(u_x)\,, u_y\rangle &= \langle n_x, u_y\rangle = \langle n, u_y\rangle_x - \langle n, u_{yx}\rangle = -\langle n, u_{yx}\rangle\,,\\
\langle \mathrm{d}\nu_p\,(u_y)\,, u_x\rangle &= \langle n_y, u_x\rangle = \langle n, u_x\rangle_y - \langle n, u_{xy}\rangle = -\langle n, u_{xy}\rangle\,,
\end{aligned}$$

d'où le résultat car $u_{xy} = u_{yx}$. □

Corollaire 1.4.5. *Soit* Σ *une surface et* $p \in \Sigma$*. Alors il existe deux vecteurs tangents* $x_1, x_2 \in T_p\Sigma$ *et deux réels* $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ *t.q.* $x_1 \perp x_2$*,* $-\mathrm{d}\nu_p\,(x_1) = \kappa_1 x_1$ *et* $-\mathrm{d}\nu_p\,(x_2) = \kappa_2 x_2$*. Les vecteurs* x_1 *et* x_2 *sont appelés les* directions principales *et les réels* κ_1 *et* κ_2 *les* courbures principales*.*

1.5 Courbures et Theorema Egregium

Définition 1.5.1 (Courbure de Gauß et courbure moyenne)**.** *Soit* Σ *une surface et* $p \in \Sigma$*. On définit deux notions de courbure en* p *:*

(i) *La* courbure de Gauß *:* $\kappa = \det\,(\mathrm{d}\nu_p) = \kappa_1\kappa_2$*.*

(ii) *La* courbure moyenne *:* $h = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(\mathrm{d}\nu_p) = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}$*.*

Proposition 1.5.2. *Soit* Σ *une surface et* $p \in \Sigma$*. Soit* $u : U \to \Sigma$ *un paramétrage d'un voisinage de* p *dans* Σ*. Alors, dans la base* (u_x, u_y)*, on a :*

$$\mathrm{Mat}\,(\mathrm{I}_p) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|u_x\|^2 & \langle u_x, u_y\rangle \\ \langle u_x, u_y\rangle & \|u_y\|^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}\,(\mathrm{II}_p) = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_{xx}, \nu\rangle & \langle u_{xy}, \nu\rangle \\ \langle u_{xy}, \nu\rangle & \langle u_{yy}, \nu\rangle \end{pmatrix}.$$

Avec ces notations :

$$\kappa = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \qquad \text{et} \qquad h = \frac{1}{2} \cdot \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}.$$

Démonstration. Montrer que la matrice de $-\mathrm{d}\nu_p$ dans la base (u_x, u_y) est $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$. □

Théorème 1.5.3 (Theorema Egregium, Gauß, 1827)**.** *Soit* $\varphi : \Sigma \to \widetilde{\Sigma}$ *une isométrie riemannienne entre deux surfaces. Alors pour tout* $p \in \Sigma$*,* $\kappa_\Sigma(x) = \kappa_{\widetilde{\Sigma}}\,(\varphi(x))$*, où* κ *dénote la courbure de Gauß.*

Démonstration. On peut démontrer le théorème par le calcul, l'argument-clé étant une commutation de dérivées partielles du troisième ordre. Toutefois, nous verrons plus loin une démonstration plus élégante (c.f. Remarque 1.7.11). □

1.6 Interprétation extrinsèque de la courbure de Gauß

Proposition 1.6.1. *Soit Σ une surface et $p \in \Sigma$. La courbure de Gauß en p est donnée par :*

$$\kappa = \lim_{\substack{A \subseteq \Sigma \\ A \to \{p\}}} \frac{\mathcal{A}\left(\nu(A)\right)}{\mathcal{A}(A)},$$

où l'aire $\mathcal{A}\left(\nu(A)\right)$ est comptée négativement lorsque ν renverse l'orientation.

Démonstration. Soit $u : U \to \Sigma$ un paramétrage. On se donne $B \subseteq U$ et on pose $A = u(B)$. Alors :

$$\mathcal{A}\left(A\right) = \int_B \|u_x \wedge u_y\| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Écrivons maintenant $\nu_x = \alpha u_x + \beta u_y$, $\nu_y = \gamma u_x + \delta u_y$. Ainsi $\mathcal{A}\left(\nu(A)\right) = \int_B |\alpha\delta - \beta\gamma| \, \|u_x \wedge u_y\| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$. Or, on a :

$$\begin{aligned} -e &= \langle \nu_x, u_x \rangle = \alpha E + \beta F, \\ -g &= \langle \nu_y, u_y \rangle = \gamma F + \delta G, \\ -f &= \langle \nu_x, u_y \rangle = \alpha F + \beta G = \gamma E + \delta F. \end{aligned}$$

Il vient $(eg - f^2) = (EG - F^2)\left(\alpha\delta - \beta\gamma\right)$, d'où $(\alpha\delta - \beta\gamma) = \kappa$. Ainsi :

$$\mathcal{A}\left(\nu(A)\right) = \int_B |\kappa| \, \|u_x \wedge u_y\| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

On obtient le résultat en faisant tendre $A \to \{p\}$, et en pensant à compter les aires négativement lorsque l'orientation est renversée. ☐

Remarque 1.6.2. *En fait, dans [3], Gauß introduit la courbure de Gauß par la formule de la Proposition 1.6.1.*

1.7 Géodésiques d'une surface

Définition 1.7.1 (Énergie et longueur d'un chemin)**.** *Soit Σ une surface et $p, q \in \Sigma$. On note $\Gamma_{p,q}$ l'ensemble des chemins $\gamma : [0,1] \to \Sigma$ de classe $\mathcal{C}^1$ t.q. $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$. Pour $\gamma \in \Gamma_{p,q}$, on définit :*

(i) *La* longueur *de γ : $L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t$.*

(ii) *L'*énergie *de γ : $E(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 \, \mathrm{d}t$.*

Le but est de minimiser $L(\gamma)$ pour $\gamma \in \Gamma_{p,q}$.

Remarque 1.7.2. *Pour $\gamma \in \Gamma_{p,q}$, on a $L(\gamma) \leq \sqrt{E(\gamma)}$ avec égalité si et seulement si $\|\gamma'\|$ est constante. Ainsi, si $E\left(\gamma_0\right) = \min_{\gamma \in \Gamma_{p,q}} E(\gamma)$ avec $\|\gamma_0'\|$ constante, alors $L\left(\gamma_0\right) = \min_{\gamma \in \Gamma_{p,q}} L(\gamma)$ (et γ_0 minimisera non seulement la longueur mais aussi le coût du paramétrage).*

Définition 1.7.3 (Géodésique)**.** *Soit Σ une surface et soit $\gamma : I \to \Sigma$ un chemin de classe $\mathcal{C}^2$. On dit que γ est une* géodésique *lorsque pour tout $t \in I$, $\gamma''(t)$ est colinéaire à $\nu\left(\gamma(t)\right)$ (i.e. normal à $T_{\gamma(t)}\Sigma$).*

Remarque 1.7.4. *On considère un paramétrage $u : U \to \Sigma$ de la surface Σ. Soit $\gamma : I \to \Sigma$ un chemin $\mathcal{C}^2$ et $\hat{\gamma} : I \to U$ un relevé de Σ, i.e. tel que $\gamma = u \circ \hat{\gamma}$. Alors γ est une géodésique si et seulement si $u \circ \hat{\gamma}$ vérifie l'*équation des géodésiques *:*

$$\begin{cases} \left\langle \left(u \circ \hat{\gamma}\right)''(t), u_x\left(\hat{\gamma}(t)\right) \right\rangle = 0 \\ \left\langle \left(u \circ \hat{\gamma}\right)''(t), u_y\left(\hat{\gamma}(t)\right) \right\rangle = 0 \end{cases}.$$

Cette équation se réécrit comme une équation différentielle du second ordre en $\hat{\gamma}$.

Théorème 1.7.5 (Existence locale des géodésiques)**.** *Soit* Σ *une surface,* $p \in \Sigma$ *et* $v \in T_p\Sigma$*. Alors il existe* $\varepsilon > 0$ *et une unique géodésique* $\gamma_{p,v} : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to \Sigma$ *t.q.* $\gamma_{p,v}(0) = p$ *et* $\gamma'_{p,v}(0) = v$*.*

Définition 1.7.6 (Paramétrage exponentiel)**.** *Soit* Σ *une surface et* $p \in \Sigma$*. On identifie* $T_p\Sigma$ *à* $\mathbb{R}^2$*. Avec les notations du Théorème 1.7.5, on définit :*

$$\Phi : v \in B_0(\delta) \subseteq T_p\Sigma \longmapsto \gamma_{p,v}(1) \in \Sigma.$$

Si $\delta > 0$ *est suffisamment petit, alors* Φ *est bien défini. C'est alors un difféomorphisme sur son image, donc un paramétrage de* Σ *au voisinage de* p*, appelé* paramétrage exponentiel*. Ce paramétrage a la propriété de relever les géodésiques issues de* p *en des géodésiques du plan (i.e. des droites).*

Remarque 1.7.7. *Le paramétrage exponentiel ne relève pas toutes les géodésiques en des géodésiques, seulement celles issues de* p*.*

Remarque 1.7.8. *Travaillons avec le paramétrage exponentiel en coordonnées polaires : si* $\Phi : B_0(\delta) \to \Sigma$ *est le paramétrage introduit dans la Définition 1.7.6, on pose :*

$$v : (r, \theta) \in (0, \delta) \times [0, 2\pi) \longmapsto \Phi\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) \in \Sigma.$$

On définit ainsi un nouveau paramétrage de Σ*. En écrivant l'équation des géodésiques dans ce paramétrage (c.f. Remarque 1.7.4), on obtient* $E_r = F_r = 0$*. On en déduit que* $E = 1$ *et* $F = 0$ *dans le paramétrage exponentiel en coordonnées polaires.*

Lemme 1.7.9. *Soit* $A \in \mathbb{R}^2$*. Alors le chemin de longueur minimale reliant* 0 *à* A *dans* $\mathbb{R}^2$ *est le segment de droite, donné par* $\gamma : t \in [0,1] \longmapsto tA \in \mathbb{R}^2$*.*

Démonstration. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^2$ de 0 à A. Pour $t \in [0,1]$, on se donne un vecteur unitaire $n(t)$ t.q. $(\gamma(t), n(t))$ est une base orthogonale directe de $\mathbb{R}^2$. On écrit alors :

$$\|\gamma'(t)\| = \left\| \frac{\langle \gamma'(t), \gamma(t)\rangle}{\|\gamma(t)\|^2}\gamma(t) + \langle \gamma'(t), n(t)\rangle\, n(t) \right\| \geq \left\| \frac{\langle \gamma'(t), \gamma(t)\rangle}{\|\gamma(t)\|^2}\gamma(t) \right\| = \|\gamma\|'(t).$$

Ainsi $\int_0^1 \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t \geq \int_0^1 \|\gamma\|'(t)\ \mathrm{d}t = \|A\|$, donc le segment de droite minimise bien la longueur. □

Théorème 1.7.10. *Soit* Σ *une surface, soit* $p, q \in \Sigma$*. Alors il existe un chemin géodésique de* p *à* q*, et ce chemin est de longueur minimale parmi les éléments de* $\Gamma_{p,q}$*.*

Démonstration. Vu la Remarque 1.7.2, on cherche à minimiser l'énergie. On se donne donc une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma_{p,q}^{\mathbb{N}}$ t.q. $E(\gamma_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf_{\gamma\in\Gamma} E(\gamma)$. Par application du Théorème d'Arzelà-Ascoli, on peut (quitte à extraire) supposer que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers un chemin $\gamma : [0,1] \to \Sigma$ qui est continu et $\left(\frac{1}{2}\right)$-hölderien, et avec $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$. Soit $0 \leq s < t \leq 1$ suffisamment proches pour que les points $\gamma(s)$ et $\gamma(t)$ soient dans l'image d'un même paramétrage exponentiel (disons, centré en $\gamma(s)$). Alors $\gamma_{|[s,t]}$ se relève en un chemin $\widetilde{\gamma}$ dans le domaine de définition $B_0(\delta)$ du paramétrage exponentiel. Vu le Lemme 1.7.9, si $\widetilde{\gamma}$ n'est pas un segment de droite, on modifie les $\widetilde{\gamma}_n$ sur $[s,t]$ de manière à diminuer uniformément l'énergie. On en déduit finalement que γ est localement (et donc globalement) géodésique ; en particulier γ est $\mathcal{C}^1$ donc $\gamma \in \Gamma_{p,q}$ et γ minimise l'énergie et la longueur. □

Remarque 1.7.11. *On va prouver le Theorema Egregium (Théorème 1.5.3) en utilisant le paramétrage exponentiel en coordonnées polaires. On a vu qu'on a* $E = 1$ *et* $F = 0$ *(c.f. Remarque 1.7.8). Et on calcule* $eg - f^2 = -\frac{1}{2}G_{rr} + \frac{1}{4}G_r^2$*, d'où :*

$$\kappa = -\frac{\left(\sqrt{G}\right)_{rr}}{\sqrt{G}}.$$

Cette formule n'est valable qu'en coordonnées polaires avec le paramétrage exponentiel, mais elle suffit toutefois à prouver le Theorema Egregium : κ *ne dépend que des coefficients de la première forme fondamentale.*

Remarque 1.7.12. *Considérons un triangle géodésique Δ_{ABC} sur une surface Σ. On note $\theta_A, \theta_B, \theta_C$ les angles respectifs en A, B, C. Alors :*

$$\theta_A + \theta_B + \theta_C = \pi + \int_{\Delta_{ABC}} \kappa \, \mathrm{d}\sigma.$$

En particulier, la courbure de Gauß κ en un point p est donnée par $\kappa = \lim_{\Delta_{ABC}\to\{p\}} \frac{\theta_A+\theta_B+\theta_C-\pi}{\mathcal{A}(\Delta_{ABC})}$. Ceci montre que la courbure de Gauß ne dépend que de la géométrie de Σ et donne donc une nouvelle preuve du Theorema Egregium (c'est en fait la preuve historique de Gauß).

2 Tenseurs

2.1 Variétés

Définition 2.1.1 (Variété)**.** *Une* variété (lisse) *de dimension n est un espace topologique M muni d'un* atlas $\mathcal{C}^\infty$ *dénombrable, i.e. d'une collection d'homéomorphismes $(\psi_i : V_i \longrightarrow U_i)_{i\in\mathbb{N}}$, où V_i est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et U_i un ouvert de M, avec $M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$, et avec des applications de changement de cartes lisses. Pour $i \in \mathbb{N}$, le couple (U_i, φ_i) (avec $\varphi_i = \psi_i^{-1}$) est appelé une* carte locale *(ou un* système de coordonnées locales*).*

Définition 2.1.2 (Application de classe $\mathcal{C}^k$ entre variétés)**.** *Soit $f : M \to N$ une application continue entre deux variétés. On dit que f est de* classe $\mathcal{C}^k$ *lorsque pour tout $x \in M$, il existe (U, φ) carte locale de M autour de x et (V, ψ) carte locale de N autour de $f(x)$ t.q. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (en tant qu'application entre deux espaces euclidiens).*

Théorème 2.1.3 (Whitney)**.** *Soit M une variété de dimension n qu'on suppose paracompacte : tout recouvrement ouvert de M admet un sous-recouvrement localement fini. Alors M se plonge dans $\mathbb{R}^{2n+1}$, i.e. M est isomorphe à une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

2.2 Fibrés tangent et cotangent

Définition 2.2.1 (Espace tangent en un point)**.** *Soit M une variété de dimension n et $x \in M$. On considère l'ensemble Γ des chemins continus $c : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to M$ qui sont dérivables en 0 et t.q. $c(0) = x$. On munit Γ d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ en définissant $c_1 \mathcal{R} c_2$ si et seulement s'il existe une carte locale (U, φ) de M autour de x t.q. $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$. Alors l'*espace tangent *à M au point x est défini par :*

$$T_x M = \Gamma / \mathcal{R}.$$

C'est naturellement un espace vectoriel de dimension n.

Remarque 2.2.2. *On a une autre manière équivalente de définir l'espace tangent $T_x M$. On considère pour cela l'espace vectoriel $\mathcal{F}_x$ des fonctions $M \to \mathbb{R}$ qui sont différentiables en x. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}_x$ est* plate *en x lorsqu'il existe une carte locale (U, φ) de M autour de x t.q. $\mathrm{d}(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} = 0$. On note de plus $\mathcal{N}_x$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}_x$ qui sont plates en x. Alors un vecteur $X \in T_x M$ est une forme linéaire sur $\mathcal{F}_x$ dont le noyau contient $\mathcal{N}_x$ (c'est en particulier une dérivation de l'algèbre $\mathcal{F}_x$). La correspondance entre les deux définitions de $T_x M$ est donnée par :*

$$[\gamma]_{\mathcal{R}} \longmapsto \left| \begin{array}{l} \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathbb{R} \\ \; f \longmapsto (f \circ \gamma)'(0) \end{array} \right. .$$

Remarque 2.2.3. *Soit (U, φ) une carte locale d'une variété M de dimension n. Alors pour point $x \in U$, on a une base $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{1\le i\le n}$ de $T_x M$ donnée par (avec la définition de $T_x M$ de la Remarque 2.2.2) :*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot f = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f \circ \varphi^{-1} \right) (\varphi(x)) .$$

Notation 2.2.4 (Convention d'Einstein). *Lorsqu'on a une somme sur un indice i qui apparaît une fois en exposant et une fois en indice dans chaque terme de la somme, on omet le symbole $\sum$, étant sous-entendu qu'on somme sur tous les indices i admissibles. Ainsi, dans une carte locale (U, φ), les coordonnées d'un vecteur de T_xM peuvent s'écrire :*

$$X = X^i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Remarque 2.2.5. *Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ deux systèmes de coordonnées locales autour d'un point x d'une variété M. On écrit un vecteur tangent $X \in T_xM$ dans les deux bases de T_xM : $X = X^i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} = \widetilde{X}^i \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}$. Alors on peut changer de système de coordonnées par la formule suivante :*

$$X^i = \widetilde{X}^j \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_j}.$$

Définition 2.2.6 (Fibré tangent). *Soit M une variété de dimension n. Le* fibré tangent *de M est défini par :*

$$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_xM.$$

C'est naturellement une variété de dimension $2n$, muni d'une projection $\pi : TM \to M$. Un champ de vecteurs *$\mathcal{C}^k$ sur M est une application $X : M \to TM$ de classe $\mathcal{C}^k$ t.q. $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$.*

Définition 2.2.7 (Espace cotangent). *Soit M une variété. Pour $x \in M$, on note T_xM^* l'espace dual de T_xM ; c'est l'*espace cotangent *à M en x.*

Remarque 2.2.8. *Soit (U, φ) une carte locale d'une variété M de dimension n. Pour $x \in U$, on a une base $(\mathrm{d}x^i)_{1 \le i \le n}$ de T_xM^* définie comme étant la base duale de $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{1 \le i \le n}$.*

Remarque 2.2.9. *Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ deux systèmes de coordonnées locales autour d'un point x d'une variété M. On écrit une forme $\eta \in T_xM^*$ dans les deux bases de T_xM^* : $\eta = \eta_i \,\mathrm{d}x^i = \widetilde{\eta}_i \,\mathrm{d}y^i$. Alors la formule de changement de base s'écrit maintenant :*

$$\eta_i = \widetilde{\eta}_j \frac{\partial y^j}{\partial x_i}.$$

2.3 Calul tensoriel

Notation 2.3.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note T^pE l'espace des formes p-linéaires $E^p \to \mathbb{R}$; c'est un espace vectoriel de dimension n^p. Étant donné $S \in T^kE$ et $T \in T^\ell E$, on définit $S \otimes T \in T^{k+\ell}E$ par :*

$$(S \otimes T)(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) = S(v_1, \ldots, v_k)\, T(v_{k+1}, \ldots, v_\ell).$$

Remarque 2.3.2. *Si $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ est une base de E^*, alors $\left(v_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{i_p}^*\right)_{1 \le i_1, \ldots, i_p \le n}$ est une base de T^pE.*

Définition 2.3.3 (Fibré des tenseurs p fois covariants). *Soit M une variété de dimension n. On définit le* fibré des tenseurs p fois covariants *de M par :*

$$T^p(TM) = \bigsqcup_{x \in M} T^p(T_xM).$$

C'est une variété de dimension $n + n^p$, muni d'une projection $\pi : T^p(TM) \to M$. Un champ de tenseurs p fois covariants *sur M est une application lisse $T : M \to T^p(TM)$ t.q. $\pi \circ T = \mathrm{id}_M$.*

Remarque 2.3.4. *Soit (U, φ) une carte locale d'une variété M de dimension n. Pour $x \in U$, $(\mathrm{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{i_p})_{1 \le i_1, \ldots, i_p \le n}$ est une base de $T^p(T_xM)$.*

Proposition 2.3.5. *Soit M une variété et T un champ de tenseurs p fois covariants sur M. Alors T induit une application :*

$$\Phi : \left| \begin{array}{c} \mathcal{X}(M)^p \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ (X_1, \ldots, X_p) \longmapsto (x \mapsto T(x)\,(X_1(x), \ldots, X_p(x))) \end{array} \right. .$$

Cette application Φ est une forme $\mathcal{C}^\infty(M)$-p-linéaire.

Lemme 2.3.6. *Soit M une variété. Pour tout $x \in M$ et pour tout $v \in T_xM$, il existe un champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(M)$ t.q. $X(x) = v$.*

Démonstration. Utiliser une fonction lisse à support compact contenu dans une carte locale de M. $\square$

Théorème 2.3.7. *Soit M une variété. Si $\Phi : \mathcal{X}(M)^p \to \mathcal{C}^\infty(M)$ est une forme $\mathcal{C}^\infty(M)$-p-linéaire, alors Φ est induite par un champ de tenseurs p fois covariants, comme dans la Proposition 2.3.5.*

Démonstration. On définit un champ de tenseurs p fois covariant T sur M en posant, pour $x \in M$ et $v_1, \ldots, v_p \in T_xM$:

$$T(x)\,(v_1, \ldots, v_p) = \Phi\,(X_1, \ldots, X_p)\,(x),$$

où X_i est un champ de vecteurs sur M t.q. $X_i(x) = v_i$ (d'après le Lemme 2.3.6). Reste à montrer que T ne dépend pas du choix de $X_1, \ldots, X_p$. Soit donc $X_1, \ldots, X_p, Y_1, \ldots, Y_p \in \mathcal{X}(M)$ t.q. $X_i(x) = Y_i(x)$ pour tout i. Montrons que $\Phi\,(X_1, \ldots, X_p)\,(x) = \Phi\,(Y_1, \ldots, Y_p)\,(x)$. On peut en fait supposer que $X_1(x) = 0$ et montrer que $\Phi\,(X_1, \ldots, X_p)\,(x) = 0$ (quitte à remplacer X_i par $X_i - Y_i$). *Étape 1.* On suppose d'abord que $X_1 = 0$ sur un voisinage ouvert V de x. On se donne $f \in \mathcal{C}_c^\infty(V)$ t.q. $f(x) = 1$. Alors $f \cdot X_1 = 0$ dans M, donc $f\Phi\,(X_1, \ldots, X_p) = \Phi\,(fX_1, X_2, \ldots, X_p) = 0$. *Étape 2.* Dans le cas général, on se donne une carte locale (U, φ) de M autour de x et on choisit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ t.q. $f = 1$ sur un voisinage ouvert $V \subseteq U$ de x. Ainsi, $fX_1 = X_1$ dans V donc $\Phi\,(X_1, \ldots, X_p)\,(x) = \Phi\,(fX_1, X_2, \ldots, X_p)\,(x)$ par l'étape 1. Écrivons maintenant $X_1 = X_1^\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$, de sorte que :

$$\begin{aligned} \Phi\,(X_1, \ldots, X_p)\,(x) &= \Phi\,(fX_1, X_2, \ldots, X_p)\,(x) = \Phi\left(fX_1^\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, X_2, \ldots, X_p\right)(x) \\ &= \underbrace{X_1^\alpha(x)}_{0}\, \Phi\left(f\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, X_2, \ldots, X_p\right) = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Notation 2.3.8. *Dorénavant, si E est un espace vectoriel de dimension finie, on note $T^{(p,q)}E$ l'espace des formes $(p+q)$-linéaires sur $E^p \times (E^*)^q$.*

Définition 2.3.9 (Fibré des tenseurs p fois covariants et q fois contravariants)**.** *Soit M une variété de dimension n. On définit le* fibré des tenseurs p fois covariants et q fois contravariants *de M par :*

$$T^{(p,q)}\,(TM) = \bigsqcup_{x \in M} T^{(p,q)}\,(T_xM)\,.$$

C'est une variété de dimension $n + n^{p+q}$, muni d'une projection $\pi : T^{(p,q)}\,(TM) \to M$. Un champ de tenseurs p fois covariants et q fois contravariants *sur M est une application lisse $T : M \to T^{(p,q)}\,(TM)$ t.q. $\pi \circ T = \mathrm{id}_M$.*

Remarque 2.3.10. *Soit (U, φ) une carte locale d'une variété M de dimension n. Pour $x \in U$, $\left(\mathrm{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{i_p} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_q}}\right)_{1 \leq i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \leq n}$ est une base de $T^{(p,q)}\,(T_xM)$.*

Définition 2.3.11 (Contraction). *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors on a un isomorphisme :*

$$\Psi : \left| \begin{aligned} \mathcal{L}(E,E) &\longrightarrow T^{(1,1)}E \\ S &\longmapsto ((x,\omega) \in E \times E^* \mapsto \omega(S(x))) \end{aligned} \right. .$$

Si $T \in T^{(1,1)}E$, la contraction *de E est par définition la* trace *de $\Psi^{-1}(S)$.*

Remarque 2.3.12. *Soit (U,φ) une carte locale d'une variété M de dimension n. Soit $x \in U$ et $T = T_i^j \, \mathrm{d}x^i \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} \in T^{(1,1)}(T_xM)$. Alors la contraction de T est T_i^i.*

Remarque 2.3.13. *Soit M une variété. On considère $T \in T^{(p,q)}(TM)$ et on fixe $1 \leq k \leq p$ et $1 \leq \ell \leq q$. Pour tous $X_1, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_p \in T_xM$, $\omega_1, \ldots, \hat{\omega}_\ell, \ldots, \omega_q \in T_xM^*$, on a un élément $T\left(X_1, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_p, \omega_1, \ldots, \hat{\omega}_\ell, \ldots, \omega_q\right) \in T^{(1,1)}(TM)$, dont on considère la contraction. L'application qui à $X_1, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_p \in T_xM$, $\omega_1, \ldots, \hat{\omega}_\ell, \ldots, \omega_q \in T_xM^*$ associe la contraction de l'élément de $T^{(1,1)}$ donné ci-dessus définit ainsi un élément $C_k^\ell T \in T^{(p-1,q-1)}(TM)$.*

3 Géométrie riemannienne

3.1 Métrique riemannienne

Définition 3.1.1 (Métrique riemannienne). *Une* métrique riemannienne *g sur une variété M est un champ de tenseurs deux fois covariant (i.e. de type $(2,0)$) sur M t.q. pour tout $x \in M$, $g(x)$ définit un produit scalaire sur T_xM. Le couple (M,g) est alors appelé une* variété riemannienne.

Remarque 3.1.2. *Dans la suite, toutes les variétés seront supposées lisses et connexes.*

Proposition 3.1.3. *Soit (U,φ) une carte locale d'une variété riemannienne (M,g) de dimension n. Pour $x \in U$, il existe $(g_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ t.q.*

$$\forall X, Y \in T_xM, \; g(x)(X,Y) = g_{ij}(x) X^i Y^j,$$

avec $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial y_j}$. La matrice $(g_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ ainsi définie est définie positive. De plus, $(g_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n}^{-1}$ définit les coordonnées d'un champ de tenseurs deux fois contravariant, qu'on notera $(g^{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$.

Proposition 3.1.4. *Soit $f : M \to N$ une immersion entre variétés, et soit g une métrique (riemannienne) sur N. Alors f^*g définit une métrique (riemannienne) sur M, donnée par :*

$$\forall x \in M, \, \forall X, Y \in T_xM, \; f^*g(x)(X,Y) = g(f(x))(\mathrm{d}f_x(X), \mathrm{d}f_x(Y)).$$

En particulier, si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $i : M \to \mathbb{R}^n$ est l'inclusion, alors $i^*\xi$ est la métrique induite sur M, où ξ est la métrique naturelle sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.1.5 (Longueur d'un chemin). *Soit (M,g) une variété riemannienne. Si $\gamma : [a,b] \to M$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1_{pm}$, alors la* longueur *de γ est définie par :*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{g(\gamma(t))} \, \mathrm{d}t,$$

où $\|X\|^2_{g(x)} = g(x)(X,X)$.

Proposition 3.1.6. *Soit (M,g) une variété riemannienne. Pour $x, y \in M$, on note :*

$$\mathscr{C}_{x,y} = \left\{\gamma \in \mathcal{C}^1_{pm}([0,1], M), \; \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y\right\}.$$

On pose de plus $d_g(x,y) = \inf_{\gamma \in \mathscr{C}_{x,y}} L(\gamma)$. Alors (M, d_g) est un espace métrique dont la topologie coïncide avec la topologie de M vue comme variété.

Théorème 3.1.7. *Une variété peut être munie d'une métrique riemannienne* ssi *elle est paracompacte.*

Définition 3.1.8 (Isométrie riemannienne)**.** *Deux variétés riemanniennes (M, g) et (N, h) sont dites* isométriques *s'il existe un difféomorphisme $f : M \to N$ t.q. $g = f^*h$. Si tel est le cas, alors f est aussi une isométrie d'espaces métriques entre (M, d_g) et (N, d_h).*

Exemple 3.1.9.

(i) Sphère standard. *On munit $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ de la métrique h induite par $\mathbb{R}^{n+1}$. Notons que si $\pi : \mathbb{S}^n \backslash \{p^+\} \to \mathbb{R}^n$ est la projection stéréographique, alors la métrique $(\pi^{-1})^* h$ sur $\mathbb{R}^n$ est donnée par :*

$$\left(\pi^{-1}\right)^* h(x)(X, Y) = \frac{4}{\left(1 + \|x\|^2\right)^2} \langle X, Y\rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

(ii) Espace hyperbolique. *Deux modèles :*
— *On munit la boule unité $B_0(1)$ de $\mathbb{R}^n$ de la métrique h définie par :*

$$h(x)(X, Y) = \frac{4}{\left(1 - \|x\|^2\right)^2} \langle X, Y\rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

— *On munit le demi-plan $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_1 > 0\}$ de la métrique $\widetilde{h}$ définie par :*

$$\widetilde{h}(x)(X, Y) = \frac{1}{x_1^2} \langle X, Y\rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

(iii) Espace projectif réel. *On considère l'espace $\mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n / \sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence antipodale, et on note que la projection $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ est localement inversible, ce qui permet de définir une métrique riemannienne $(\pi^{-1})^* h$ sur $\mathbb{RP}^n$ à partir de la métrique h de la sphère standard.*

(iv) Tore. *On munit $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ de la métrique euclidienne.*

Remarque 3.1.10. *Le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ne peut pas être plongé isométriquement dans $\mathbb{R}^3$.*

Définition 3.1.11 (Variété riemannienne produit)**.** *Soit (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes. Pour $(x, y) \in M \times N$, on a $T_{(x,y)}(M \times N) = T_xM \times T_yN$, ce qui permet de définir, étant donné $\varphi \in \mathcal{C}^\infty\left(M, \mathbb{R}_+^*\right)$, une métrique $g \times_\varphi h$ sur $M \times N$ par :*

$$(g \times_\varphi h)(x, y)(X, Y) = g(x)(X_1, Y_1) + \varphi(x)h(y)(X_2, Y_2).$$

Théorème 3.1.12 (Nash, 1956)**.** *Toute variété riemannienne de dimension n se plonge isométriquement dans $\mathbb{R}^N$, avec $N = \frac{1}{2}(n + 2)(n + 3)$.*

3.2 Géodésiques et carte exponentielle

Définition 3.2.1 (Énergie d'un chemin)**.** *Soit (M, g) une variété riemannienne. Étant donné un chemin $\gamma : [a, b] \to M$ de classe $\mathcal{C}^1_{pm}$, on définit l'*énergie *de γ par :*

$$E(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|^2_{g(\gamma(t))}\, \mathrm{d}t.$$

Remarque 3.2.2. *Le but de ce qui suit est, étant donnés deux points p, q d'une variété riemannienne (M, g), de trouver un chemin $\gamma \in \mathscr{C}_{p,q}$ de longueur minimale. Vu la Remarque 1.7.2, on peut en fait chercher un chemin d'énergie minimale. Supposons disposer d'un tel chemin γ, et supposons de plus*

γ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Comme γ minimise localement l'énergie, on peut se ramener au cas où γ est inclus dans une carte (U,φ) de M. Alors :

$$E(\gamma) = \int_0^1 g_{ij}\left(\gamma(t)\right)\left(\gamma^i\right)'(t)\left(\gamma^j\right)'(t)\ \mathrm{d}t.$$

On note maintenant $\mathcal{C}_c^\infty\left([0,1],\mathbb{R}^n\right)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty\left([0,1],\mathbb{R}^n\right)$ t.q. les dérivées de f à tout ordre en 0 et 1 sont nulles. Étant donné $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty\left([0,1],\mathbb{R}^n\right)$, on considère les chemins $\gamma_\varepsilon = \gamma + \varepsilon\varphi$, avec ε suffisamment petit pour que γ_ε soit dans la carte (U,φ). Comme γ est d'énergie minimale, il vient $E\left(\gamma_\varepsilon\right) \geq E\left(\gamma\right)$, d'où on déduit que :

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}E\left(\gamma_\varepsilon\right)\right)_0 = 0.$$

En faisant le calcul, on aboutit à l'égalité $\forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty\left([0,1],\mathbb{R}^n\right),\ \int_0^1 F_k(t)\varphi^k(t) = 0$, où $F_k(t) = \partial_k g_{ij}\left(\gamma(t)\right)\left(\gamma^i\right)'(t)\left(\gamma^j\right)'(t) - 2\left(g_{kj}\left(\gamma(\cdot)\right)\left(\gamma^j\right)'\right)'(t)$. Il vient $F_k = 0$, ce qui se traduit par :

$$\left(\gamma^\ell\right)''(t) + \Gamma_{ij}^\ell\left(\gamma(t)\right)\left(\gamma^i\right)'(t)\left(\gamma^j\right)'(t) = 0, \qquad (*)$$

avec :

$$\Gamma_{ij}^\ell = \frac{1}{2}g^{k\ell}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right).$$

Définition 3.2.3 (Géodésique)**.** *Soit M une variété riemannienne. On dit qu'un chemin $\gamma : [a,b] \to M$ est une* géodésique *lorsque γ vérifie l'équation $(*)$, appelée* équation des géodésiques*, dans toute carte locale (U,φ) de M.*

Proposition 3.2.4. *Une géodésique est paramétrée à vitesse constante.*

Remarque 3.2.5. *Si γ est une géodésique et $c \in \mathbb{R}$, alors $\gamma\left(c\cdot\right)$ est aussi une géodésique.*

Théorème 3.2.6 (Existence locale des géodésiques)**.** *Soit (M,g) une variété riemannienne et $p \in M$. Alors il existe V voisinage de p dans M, $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ t.q. pour tout $q \in V$, pour tout $v \in T_qM$ avec $\|v\|_{g(q)} < r$, il existe une unique géodésique $\gamma_{(q,v)} : (-\varepsilon,+\varepsilon) \to M$ avec $\gamma_{(q,v)}(0) = q$ et $\gamma'_{(q,v)}(0) = v$. De plus, si on fixe $t \in (-\varepsilon,+\varepsilon)$, l'application :*

$$\Theta_t : (q,v) \in W \longmapsto \left(\gamma_{(q,v)}(t), \gamma'_{(q,v)}(t)\right) \in TM,$$

est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme, avec $W = \bigsqcup_{q\in V}\left\{v \in T_qM,\ \|v\|_{g(q)} < r\right\}$.

Corollaire 3.2.7. *Soit (M,g) une variété riemannienne et $p \in M$. Alors il existe V voisinage de p dans M et $r > 0$ t.q. avec les notations du Théorème 3.2.6, l'application :*

$$\mathrm{Exp} : (q,v) \in W \longmapsto \gamma_{(q,v)}(1) \in M,$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Définition 3.2.8 (Carte exponentielle)**.** *Soit (M,g) une variété riemannienne et $p \in M$. On se donne une base orthonormale $(e_1,\ldots,e_n)$ de T_pM, et on a ainsi un isomorphisme $\Phi : X \in \mathbb{R}^n \longmapsto X^ie_i \in T_pM$. Il existe alors $r > 0$ t.q. l'application :*

$$\exp_p : x \in B_0(r) \longmapsto \mathrm{Exp}\left(p,\Phi(x)\right) = \gamma_{(p,\Phi(x))}(1) \in M,$$

est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp_p(tx)\right)_0 = \Phi(x)$. Quitte à réduire r, $\exp_p$ est donc un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme sur son image Ω. Le couple $\left(\Omega, \exp_p^{-1}\right)$ est appelé la carte exponentielle *de M au point p.*

Lemme 3.2.9 (Gauß)**.** *Soit (M,g) une variété riemannienne et $p \in M$. On note $(g_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq n}$ les coordonnées de g dans la carte exponentielle au point p.*

(i) $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

(ii) $g_{ij}(x)x^i x^j = \|x\|^2$.

(iii) $g_{ij}(x)x^j = x_i$.

(iv) $\partial_k g_{ij}(0) = 0$.

Démonstration. Noter que, dans la carte exponentielle, le chemin défini par $\gamma(t) = tX$ est une géodésique pour tout X. En écrivant l'équation des géodésiques, en déduire que :

$$\Gamma_{ij}^k(tX)X^iX^j = 0.$$

Montrer les différents points de la proposition à partir de cette formule. □

Lemme 3.2.10. *Soit (M,g) une variété riemannienne et $p \in M$. On sait qu'il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $\exp_p : B_0(\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \Omega = \exp_p(B_0(\varepsilon))$ est un difféomorphisme. On considère le point $y \in \Omega \subseteq M$ de coordonnées $(y_1,\ldots,y_n)$ dans la carte $\left(\Omega, \exp_p^{-1}\right)$ et on s'intéresse à la géodésique définie par $\gamma(t) = \exp_p(ty_1,\ldots,ty_n)$. Alors γ est minimisante pour la longueur sur $[0,1]$. De plus, tout chemin $\tilde{\gamma}$ joignant p à y et minimisant la longueur est un reparamétrage de γ.*

Démonstration. Soit $c : [0,1] \to M$ un chemin $\mathcal{C}^1_{pm}$ joignant p à y. On peut supposer que c reste dans la carte exponentielle $\left(\Omega, \exp_p^{-1}\right)$ et que c est injectif (et on confond c et ses coordonnées dans la carte exponentielle). On peut écrire, pour tout t :

$$c'(t) = \frac{\langle c'(t), c(t)\rangle_{\text{eucl}}}{\|c(t)\|^2_{\text{eucl}}} c(t) + Z(t),$$

avec $\langle Z(t), c(t)\rangle_{\text{eucl}} = 0$. Par le Lemme de Gauß (Lemme 3.2.9), il vient :

$$\|c'(t)\|^2_{g(c(t))} \geq \frac{\langle c'(t), c(t)\rangle^2_{\text{eucl}}}{\|c(t)\|^2_{\text{eucl}}},$$

avec égalité ssi $Z(t) = 0$. En intégrant, on en déduit que $L(c) \geq L(\gamma)$, avec égalité ssi c est un reparamétrage de γ. □

Proposition 3.2.11. *Soit (M,g) une variété riemannienne et $p \in M$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ t.q.*

(i) Lemme de Whitehead. *La boule riemannienne $B_g(p,\varepsilon)$ est géodésiquement convexe, i.e. pour tous $q, q' \in B_g(p,\varepsilon)$, il existe une unique géodésique joignant q à q' et restant dans $B_g(p,\varepsilon)$.*

(ii) *Pour tout $q \in B_g(p,\varepsilon)$, $\exp_q : B_0(\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow B_g(q,\varepsilon)$ est un difféomorphisme. De plus :*
  - *Tout chemin $\gamma : [a,b] \to M$ minimisant l'énergie est une géodésique.*
  - *Tout chemin $\gamma : [a,b] \to M$ minimisant la longueur est une géodésique reparamétrée.*

Théorème 3.2.12 (Hopf-Rinow, 1931)**.** *Soit (M,g) une variété riemannienne. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *(M, d_g) est un espace métrique complet.*

(ii) *Les fermés bornés de M sont compacts.*

(iii) *Il existe un point $x \in M$ t.q. l'application Exp_x est définie sur tout T_xM.*

(iv) *Pour tout point $x \in M$, l'application Exp_x est définie sur tout T_xM.*

Dans ce cas, on dit que (M,g) est une variété riemannienne complète. *De plus, pour tous $x, y \in M$, il existe une unique géodésique γ joignant x à y t.q. $L(\gamma) = d_g(x,y)$.*

Démonstration. (iv) $\Rightarrow$ (iii) Clair. (ii) $\Rightarrow$ (i) Clair. (i) $\Rightarrow$ (iv) Soit $x \in M$, et γ une géodésique avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = X \in T_xM$. Il s'agit de montrer que γ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour cela, on suppose par l'absurde qu'il existe un temps maximal d'existence T. Comme les géodésiques sont paramétrées à vitesse constante, on a $\|\gamma'(t)\|_{g(\gamma(t))} = \|X\|_{g(x)}$ pour tout t, d'où on déduit, pour tous t, t' :

$$d_g\left(\gamma(t), \gamma\left(t'\right)\right) \leq \|X\|_{g(x)} \cdot \left|t - t'\right|.$$

Ainsi, si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite t.q. $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} T$, alors $(\gamma(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, d'où on déduit par complétude que $\gamma(t_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$. Ainsi, $\lim_{T^-} \gamma = y$. En se plaçant dans une carte locale au voisinage de y et en écrivant l'équation des géodésiques, on montre que $\lim_{T^-} \gamma'$ existe. On en déduit alors par le théorème de Cauchy-Lipschitz qu'on peut prolonger γ au-delà de T : c'est une contradiction. (iii) $\Rightarrow$ (ii) On se donne $x \in M$ t.q. Exp_x est définie sur tout T_xM. Pour $r > 0$, on note $M_x(r)$ l'ensemble des points $y \in \overline{B_g(x,r)}$ pouvant être joints à x par une géodésique minimisante. Notons que tout point de $M_x(r)$ s'écrit $y = \mathrm{Exp}_x(tX)$, avec $\|X\| = 1$ et $t = d_g(x,y)$. On en déduit que $M_x(r)$ est compact. On suppose par l'absurde que $r_0 = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+,\ \forall s \in [0,r],\ M_x(s) = \overline{B_g(x,s)}\right\} < +\infty$. Alors $M_x(r_0)$ est compact, donc par le Lemme de Whitehead (Proposition 3.2.11), il existe $\eta > 0$ t.q. toutes les boules $B_g(z,\eta)$ sont géodésiquement convexes pour $z \in M_x(r_0)$. Soit $y \in B_g(x, r_0+\eta) \backslash M_x(r_0+\eta)$ et soit $z \in \partial B_g(x,r_0)$ minimisant la distance à y. Tout chemin joignant x à y doit traverser $\partial B_g(x,r_0)$, donc est de longueur $\geq r_0 + d_g(y,z)$. On en déduit $r_0 + \eta \geq d_g(x,y) \geq r_0 + d_g(y,z)$, d'où $d_g(y,z) \leq \eta$. Il existe donc une géodésique minimisante joignant y à z, donc il en existe une joignant x à y, d'où $y \in M_x(r_0+\eta)$. C'est une contradiction. Donc $M_x(r) = \overline{B_g(x,r)}$ pour tout r. Ceci prouve que les boules fermées de centre x sont compactes, donc les fermés bornés sont compacts. Et on a de plus prouvé l'existence des géodésiques minimisantes. □

3.3 Application : théorème de Myers-Steenrod

Théorème 3.3.1 (Myers–Steenrod, 1939)**.** *Soit (M,g) et (N,h) deux variétés riemanniennes. Alors toute isométrie (bijective) $\varphi : (M,d_g) \to (N,d_h)$ au sens des espaces métriques est aussi une isométrie riemannienne.*

Démonstration. Montrons d'abord que φ envoie les géodésiques de M sur des géodésiques de N. Pour $x \in M$ et $X \in T_xM$ avec $\|X\|_{g(x)} = 1$, soit $\gamma_{x,X}$ la géodésique de M t.q. $\gamma_{x,X}(0) = x$ et $\gamma'_{x,X}(0) = X$. Il existe $\eta > 0$ t.q.

$$\forall t,t' \in [0,\eta],\ d_g\left(\gamma_{x,X}(t), \gamma_{x,X}\left(t'\right)\right) = \left|t - t'\right|.$$

On note $\widetilde{\gamma}_X = f \circ \gamma_{x,X}$, de sorte que $\forall t,t' \in [0,\eta]$, $d_h\left(\widetilde{\gamma}_X(t), \widetilde{\gamma}_X\left(t'\right)\right) = |t-t'|$. Montrons que $\widetilde{\gamma}_X$ est une géodésique. Pour cela, on peut supposer que η est suffisamment petit pour appliquer le Lemme de Whitehead (c.f. Proposition 3.2.11) dans $B_h(y, 2\eta)$, avec $y = f(x)$. On sait ainsi qu'il existe une unique géodésique paramétrée par longueur d'arc Γ joignant y à $\widetilde{\gamma}_X(\eta)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $t \in\,]0,\eta[$ t.q. $\Gamma(t) \neq \widetilde{\gamma}_X(t)$. Par le Lemme de Whitehead, il existe donc $\widetilde{t} \in [0,\eta]$ t.q. $\widetilde{\gamma}_X(t) = \Gamma\left(\widetilde{t}\right)$. En effet, si c'était faux, alors par unicité des géodésiques :

$$\eta = d_h\left(\widetilde{\gamma}_X(0), \widetilde{\gamma}_X(\eta)\right) < d_h\left(\widetilde{\gamma}_X(0), \widetilde{\gamma}_X(t)\right) + d_h\left(\widetilde{\gamma}_X(t), \widetilde{\gamma}_X(\eta)\right) = t + (\eta - t) = \eta,$$

ce qui est absurde. Ainsi, il existe $\widetilde{t} \in [0,\eta]$ comme ci-dessus, et on obtient $t = \widetilde{t}$ car $\widetilde{\gamma}_X$ et Γ sont deux plongements isométriques $[0,\eta] \to N$ (au sens des espaces métriques). C'est absurde, d'où on déduit $\widetilde{\gamma}_X = \Gamma$. Ceci prouve que $\widetilde{\gamma}_X = f \circ \gamma_{x,X}$ est une géodésique, et en particulier une application $\mathcal{C}^\infty$. Si on note $\Phi(X) = \left(f \circ \gamma_{x,X}\right)'(0)$, on obtient ainsi une application $\Phi : S_xM \to S_{f(x)}N$ (avec $S_xM = \left\{X \in T_xM,\ \|X\|_{g(x)} = 1\right\}$ et idem pour $S_{f(x)}N$), qu'on prolonge en $\Phi : T_xM \to T_{f(x)}N$ en posant $\Phi(\lambda X) = \lambda\Phi(X)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $X \in S_xM$. Ceci fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T_xM & \xrightarrow{\Phi} & T_{f(x)}N \\ {\scriptstyle \mathrm{Exp}_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Exp}_{f(x)}} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Reste à prouver que Φ est une isométrie vectorielle, sachant que :

$$\forall X \in T_xM,\ \|\Phi(X)\|_{h(f(x))} = \|X\|_{g(x)}.$$

Soit $X, Y \in S_xM$. Si α est l'angle entre X et Y, donné par $\cos(\alpha) = \langle X, Y\rangle_{g(x)}$, alors :

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{d_g\left(\gamma_{x,X}(t), \gamma_{x,Y}(t)\right)}{2t}.$$

Ceci prouve qu'on peut calculer $\langle X, Y\rangle_{g(x)}$ à partir de la limite ci-dessus. Or cette limite est égale à $\lim_{t\to 0} \frac{d_h\left(\widetilde{\gamma}_X(t), \widetilde{\gamma}_Y(t)\right)}{2t}$, à partir de laquelle on peut calculer $\langle \Phi(X), \Phi(Y)\rangle_{h(f(x))}$. On en déduit :

$$\forall X, Y \in T_xM,\ \langle \Phi(X), \Phi(Y)\rangle_{h(f(x))} = \langle X, Y\rangle_{g(x)}.$$

On en déduit aisément que Φ est linéaire (en utilisant le fait que Φ envoie une base orthonormée de T_xM sur une base orthonormée de $T_{f(x)}N$), et donc que c'est une isométrie vectorielle. □

3.4 Métrique dans la carte exponentielle

Remarque 3.4.1. *Soit M une variété riemannienne et $p \in M$. On a vu (Lemme 3.2.9) que, dans la carte exponentielle au point p, les coordonnées $(g_{ij}(x))_{1\le i,j\le n}$ de la métrique vérifient :*

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij} \qquad \text{et} \qquad \partial_k g_{ij}(0) = 0.$$

En particulier, si (M, g) est localement isométrique à l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \xi)$, alors l'isométrie est nécessairement donnée par la carte exponentielle. Poursuivons maintenant le développement limité de g_{ij} :

$$g_{ij}(x)X^iX^j = \|X\|_\xi^2 + \frac{1}{2}\partial_{k\ell}g_{ij}(0)x^kx^\ell X^iX^j + \mathcal{O}_0\left(\|x\|_\xi^3 \|X\|_\xi^3\right).$$

Ainsi, les $\frac{1}{2}\partial_{k\ell}g_{ij}(0)$ mesurent la différence entre la géométrie de M et la géométrie euclidienne.

Notation 3.4.2. *Soit M une variété riemannienne et $p \in M$. Si $(g_{ij}(x))_{1\le i,j\le n}$ sont les coordonnées de la métrique dans la carte $\exp_p$, on notera $c_{ijk\ell} = \frac{1}{2}\partial_{k\ell}g_{ij}(0)$ et $Q(x, X) = c_{ijk\ell}X^iX^jx^kx^\ell$. On peut voir Q comme une application définie sur $T_pM \times T_pM$.*

Lemme 3.4.3. *Soit V un espace euclidien. On considère une application $Q : V \times V \to \mathbb{R}$ donnée par $Q(X, Y) = c_{ijk\ell}X^iX^jY^kY^\ell$. On suppose que $c_{ijk\ell} = c_{jik\ell}$ et $c_{ijk\ell} = c_{ij\ell k}$. Alors $\frac{Q(X,Y)}{\|X\|^2\|Y\|^2-\langle X,Y\rangle^2}$ ne dépend que de* $\mathrm{Vect}(X, Y)$ ssi *les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $c_{ijk\ell} = c_{k\ell ij}$,

(ii) $c_{ijk\ell} + c_{i\ell jk} + c_{ik\ell j} = 0$.

Démonstration. Poser $A(X, Y, Z, T) = c_{ijk\ell}X^iY^jZ^kT^\ell$ et montrer que la condition (ii) est équivalente à $A(\cdot, X, X, X) = 0$ et que la condition (i) est équivalente à $A(X, X, Y, Y) = A(Y, Y, X, X)$. □

Proposition 3.4.4. *Soit M une variété riemannienne et $p \in M$. Soit $(g_{ij}(x))_{1\le i,j\le n}$ les coordonnées de la métrique dans la carte $\exp_p$. Alors il existe une fonction K_g définie sur l'ensemble des plans vectoriels de T_pM t.q.*

$$g_{ij}(x)X^iX^j = \|X\|_\xi^2 - \frac{1}{3}K_g\left(\mathrm{Vect}\,(x, X)\right)\left(\|x\|^2\|X\|^2 - \langle x, X\rangle^2\right) + \mathcal{O}_0\left(\|x\|_\xi^3\|X\|_\xi^3\right).$$

Le réel $K_g\left(\mathrm{Vect}\,(x, X)\right)$ est appelé courbure sectionnelle *du plan* $\mathrm{Vect}(x, X)$.

Remarque 3.4.5. *Dans le cas d'une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$, chaque plan tangent contient un seul plan vectoriel (lui-même), dont la courbure sectionnelle est égale à la courbure de Gauß de la surface.*

Définition 3.4.6 (Courbure de Riemann)**.** *Soit M une variété riemannienne. La* courbure de Riemann *de M est un champ de tenseurs Rm_g de type $(4,0)$ t.q. pour tout $p \in M$, si $(R_{ijk\ell}(x))_{1\leq i,j,k,\ell\leq n}$ sont les coordonnées de Rm_g dans la carte $\exp_p$, alors :*

$$R_{ijk\ell}(0) = \frac{1}{2}\left(\partial_{ik}g_{j\ell}(0) - \partial_{jk}g_{i\ell}(0) - \partial_{i\ell}g_{jk}(0) + \partial_{j\ell}g_{ik}(0)\right).$$

On a ainsi :

(i) $R_{ijk\ell} = -R_{jik\ell}$,

(ii) $R_{ijk\ell} = -R_{ij\ell k}$,

(iii) $R_{ijk\ell} = R_{k\ell ij}$,

(iv) $R_{ijk\ell} + R_{i\ell jk} + R_{ik\ell j} = 0$.

Remarque 3.4.7. *Soit M une variété riemannienne et $p \in M$. Soit $(g_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq n}$ les coordonnées de la métrique dans la carte $\exp_p$. Alors :*

$$g_{ij}(x)X^iX^j = \|X\|_\xi^2 - \frac{1}{3}R_{ijk\ell}(0)x^kx^\ell X^iX^j + \mathcal{O}_0\left(\|x\|_\xi^3\|X\|_\xi^3\right).$$

Définition 3.4.8 (Courbure sectionnelle)**.** *Soit M une variété riemannienne. Pour $p \in M$ et $X, Y \in T_pM$, la* courbure sectionnelle *du plan $\mathrm{Vect}(X,Y)$ est définie par :*

$$K_g\left(\mathrm{Vect}(X,Y)\right) = \frac{\mathrm{Rm}_g(X,Y,X,Y)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2}.$$

3.5 Une connexion naturelle : la connexion de Levi-Civita

Définition 3.5.1 (Connexion linéaire)**.** *Soit M une variété. Une* connexion linéaire *sur M est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire $D : (X,Y) \in \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longmapsto D_XY \in \mathcal{X}(M)$ t.q. pour tous $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$:*

$$D_{fX}Y = fD_XY \qquad \text{et} \qquad D_X(fY) = (X\cdot f)Y + fD_XY.$$

Définition 3.5.2 (Connexion de Levi-Civita)**.** *Soit M une variété riemannienne. La* connexion de Levi-Civita *associée à la métrique g est la connexion D t.q. pour tout $p \in M$, on a dans la carte $\left(\Omega, \exp_p^{-1}\right)$:*

$$\left(D_XY\right)^i(p) = X^j(p)\frac{\partial Y^i}{\partial x_j}(p).$$

On a alors, dans une carte (U,φ) quelconque :

$$\left(D_XY\right)^k = X^i\frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + A_{ij}^kX^iY^j.$$

Les réels A_{ij}^k sont appelés symboles de Christoffel *de la connexion dans la carte (U,φ).*

Remarque 3.5.3. *Soit M une variété. On peut être tenté de voir une connexion D sur M comme un champ de $(2,1)$-tenseurs donné par $D(X,Y,\eta) = \eta\left(D_XY\right)$. Ceci ne définit pas un champ de tenseurs car D n'est pas $\mathcal{C}^\infty$-linéaire en Y. Par contre, si D et $\widetilde{D}$ sont deux connexions, alors $D - \widetilde{D}$ définit bien un champ de $(2,1)$-tenseurs.*

Définition 3.5.4 (Torsion d'une connexion)**.** *Soit M une variété. La* torsion T *d'une connexion D sur M est le champ de $(2,1)$-tenseurs défini par :*

$$T(X,Y,\eta) = \eta\left(D_X Y - D_Y X - [X,Y]\right),$$

avec $[X,Y]\cdot\varphi = X\cdot(Y\cdot\varphi) - Y\cdot(X\cdot\varphi)$. On dit que D est sans torsion *si $T=0$.*

Proposition 3.5.5. *Une connexion D sur M est sans torsion si et seulement si les symboles de Christoffel vérifient $A_{ij}^k = A_{ji}^k$ dans toute carte.*

Remarque 3.5.6. *La connexion de Levi-Civita est sans torsion.*

Définition 3.5.7. *Soit M une variété et D une connexion. Alors il existe une unique* dérivation covariante $\nabla : T^{(p,q)}M \longrightarrow T^{(p+1,q)}M$ *t.q.*

(i) *Pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) = T^{(0,0)}M$, on a $\nabla f = \mathrm{d}f$.*

(ii) *Pour un champ de vecteurs $Y \in \mathcal{X}(M) = T^{(0,1)}M$, on a $\nabla Y(X,\eta) = \eta\left(D_X Y\right)$.*

(iii) *Pour $T \in T^{(p,q)}M$, $T' \in T^{(p',q')}M$, on a :*

$$\nabla\left(T\otimes T'\right) = \nabla T \otimes T' + T \otimes \nabla T'.$$

(iv) *Pour $T \in T^{(p,q)}M$, $1 \leq k \leq p$ et $1 \leq \ell \leq q$:*

$$\nabla\left(C_k^\ell T\right) = C_k^\ell\left(\nabla T\right).$$

Remarque 3.5.8. *Soit M une variété, D une connexion. Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$, on a dans une carte (U,φ) :*

$$\left(\nabla^2 f\right)_{ij} = \left(\nabla\left(\nabla f\right)\right)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - A_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Donc D est sans torsion si et seulement si $\nabla^2 f \in T^{(2,0)}M$ est symétrique pour tout f.

Proposition 3.5.9. *Soit M une variété riemannienne. Alors la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion sur M qui est sans torsion et* compatible *avec la métrique g, au sens où :*

$$\nabla g = 0.$$

3.6 Transport parallèle

Définition 3.6.1 (Champ de vecteurs le long d'un chemin)**.** *Soit M une variété et $\gamma : [a,b] \to M$ un chemin lisse. Un* champ de vecteurs le long de γ *est une application lisse $X : [a,b] \to TM$ t.q.*

$$\forall t \in [a,b],\ X(t) \in T_{\gamma(t)}M.$$

Si M est munie d'une connexion D, on pose $\dot{X}(t) = D_{\gamma'(t)}X$. Pour donner un sens à cette définition, notons qu'on peut prolonger γ' en un champ de vecteurs $\widetilde{Y} \in \mathcal{X}(M)$ et X en un champ de vecteurs $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(M)$, et qu'alors $D_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}$ ne dépend pas du choix des extensions.

Définition 3.6.2 (Transport parallèle)**.** *Soit M une variété munie d'une connexion. Soit $\gamma : [a,b] \to M$ un chemin lisse. Alors pour tout $X_0 \in T_{\gamma(0)}M$, il existe un unique champ de vecteurs X le long de γ t.q.*

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = 0 \\ X(a) = X_0 \end{cases}.$$

Le champ X est appelé transport parallèle *de X_0 le long de γ.*

Proposition 3.6.3. *Si M est une variété riemannienne, alors le transport parallèle transporte les bases orthonormées sur des bases orthonormées.*

Remarque 3.6.4. *Une géodésique γ sur une variété riemannienne M est un chemin t.q. $\dot{(\gamma')} = 0$. Ceci donne une définition purement différentielle des géodésiques.*

3.7 Courbure d'une connexion et courbure de Riemann

Notation 3.7.1. *Soit M une variété munie d'une connexion. On se place dans une carte (U, φ). Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, on notera $f_{,i} = (\nabla f)_i$, et $f_{,ij} = (\nabla^2 f)_{ij} = (\nabla f_{,i})_{,j}$. On utilisera la même notation pour les champs de vecteurs.*

Remarque 3.7.2. *Soit M une variété munie d'une connexion. Pour $Z \in \mathcal{X}(M)$, on a :*

$$\nabla^2 Z(\eta, X, Y) = \eta\left(D_Y D_X Z - D_{D_Y X} Z\right).$$

D'où :

$$\begin{aligned}\nabla^2 Z(\eta, X, Y) - \nabla^2 Z(\eta, Y, X) &= \eta\left(D_Y D_X Z - D_X D_Y Z - D_{D_Y X - D_X Y} Z\right) \\ &= \eta\left(D_Y D_X Z - D_X D_Y Z + D_{[X,Y]} Z\right) \quad \textit{si } D \textit{ est sans torsion.}\end{aligned}$$

Définition 3.7.3 (Courbure d'une connexion)**.** *Soit M une variété. La* courbure *d'une connexion D sur M est le champ de $(3,1)$-tenseurs défini par :*

$$R(X, Y, Z, \eta) = \eta\left(D_Y D_X Z - D_X D_Y Z + D_{[X,Y]} Z\right).$$

Ainsi, R mesure le défaut de commutativité de $\nabla^2 Z(\eta, X, Y)$ en X, Y.

Définition 3.7.4 (Courbure de Riemann)**.** *Soit M une variété riemannienne. Si D est la connexion de Levi-Civita de M, alors la* courbure de Riemann *de M est le champ de $(4,0)$-tenseurs Rm_g défini par :*

$$\mathrm{Rm}_g(X, Y, Z, T) = \left\langle T, D_Y D_X Z - D_X D_Y Z + D_{[X,Y]} Z\right\rangle_{g(x)} = C_4^1 R \otimes g,$$

où R est la courbure de la connexion D.

Remarque 3.7.5. *Soit M une variété riemannienne. Dans une carte, on a :*

$$(\mathrm{Rm}_g)_{ijk\ell} = g_{\ell m}\left(\partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m + \Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^m - \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^m\right).$$

Dans une carte exponentielle au point 0, on retrouve la Définition 3.4.6.

3.8 Interprétations géométriques de la courbure de Riemann

Remarque 3.8.1. *Soit M une variété riemannienne. On considère un chemin γ qui trace un petit carré de côté ε dans une carte exponentielle autour d'un point p (i.e. γ suit une géodésique de 0 à εe_i, puis une autre de εe_i à $\varepsilon(e_i + e_j)$, etc.). On choisit un troisième vecteur e_k orthogonal aux deux côtés du carré et on considère son transport parallèle $X : [0, 4\varepsilon] \to M$ le long de γ. Alors :*

$$X^\ell(4\varepsilon) = \delta_k^\ell + \varepsilon^2 R_{ijk}{}^\ell + o_0\left(\varepsilon^2\right),$$

où R est la courbure de la connexion de Levi-Civita de M. Ainsi, R mesure le défaut de parallélisme d'un parallélépipède infinitésimal.

Remarque 3.8.2. *Soit M une variété riemannienne et $p \in M$. Soit X, Y deux vecteurs libres et unitaires de T_pM. Pour t suffisamment petit, on note γ une géodésique reliant tX à tY (i.e. leurs images par la carte exponentielle) et on pose $\ell(t) = L(\gamma)$. Si α est l'angle entre X et Y (i.e. $\cos\alpha = \langle X, Y\rangle_{g(p)}$), alors :*

$$\ell(t) = 2t\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{48} K_g\left(\mathrm{Vect}\{X, Y\}\right)\left(1 + \langle X, Y\rangle_{g(p)}\right) t^2 + o_0\left(t^2\right)\right).$$

Ceci donne une interprétation de la courbure comme mesure de la vitesse d'éloignement des géodésiques.

3.9 Identités de Bianchi

Proposition 3.9.1 (Bianchi)**.** *Soit M une variété riemannienne. Alors dans une carte, les coordonnées du tenseur de Riemann Rm_g vérifient :*

(i) $(\mathrm{Rm}_g)_{ijk\ell} + (\mathrm{Rm}_g)_{kij\ell} + (\mathrm{Rm}_g)_{jki\ell} = 0$.

(ii) $(\mathrm{Rm}_g)_{ijk\ell,m} + (\mathrm{Rm}_g)_{ijmk,\ell} + (\mathrm{Rm}_g)_{ij\ell m,k} = 0$.

3.10 Autres notions de courbure

Définition 3.10.1 (Courbure de Ricci et courbure scalaire)**.** *Soit M une variété riemannienne.*

(i) *La* courbure de Ricci *de M est le champ de $(2,0)$ tenseurs symétriques donné par :*

$$\mathrm{Ric}_g = C_1^1 C_3^2 \, \mathrm{Rm}_g \otimes g^{-1}.$$

Autrement dit, en coordonnées : $(\mathrm{Ric}_g)_{ij} = g^{k\ell} R_{ijk\ell}$.

(ii) *La* courbure scalaire *de M est la fonction lisse donnée par :*

$$S_g = C_1^1 C_2^2 \, \mathrm{Ric}_g \otimes g^{-1}.$$

Autrement dit, en coordonnées : $S_g = g^{ij} (\mathrm{Ric}_g)_{ij}$.

Remarque 3.10.2. *Pour une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire $A = A_0 + \frac{\operatorname{tr} A}{n} \mathrm{Id}$, où $A_0 \in \operatorname{Ker} \operatorname{tr}$. De même, sur une variété riemannienne, on a :*

$$\mathrm{Ric}_g = E_g + \frac{S_g}{n} g,$$

où E_g est un champ de $(2,0)$-tenseurs de trace nulle appelé tenseur d'Einstein.

Définition 3.10.3 (Produit de Kulkarni–Nomizu)**.** *Soit M une variété et $T, \widetilde{T}$ deux champs de $(2,0)$-tenseurs symétriques. On définit alors le champ de $(4,0)$-tenseurs $T \odot \widetilde{T}$ par :*

$$T \odot \widetilde{T}\,(X,Y,Z,U) = T(X,Z)\widetilde{T}(Y,U) + T(Y,U)\widetilde{T}(X,Z) - T(X,U)\widetilde{T}(Y,Z) - T(Y,Z)\widetilde{T}(X,U).$$

Définition 3.10.4 (Courbure de Weyl)**.** *Soit M une variété riemannienne. Alors on peut écrire :*

$$\mathrm{Rm}_g = \frac{S_g}{2n(n-1)} g \odot g \overset{\perp}{\oplus} \frac{1}{n-2} E_g \odot g \overset{\perp}{\oplus} W_g,$$

où W_g est un champ de $(4,0)$-tenseurs appelé courbure de Weyl.

Remarque 3.10.5. *Soit M une variété riemannienne de dimension 3. Alors $W_g = 0$.*

Théorème 3.10.6. *Soit M une variété riemannienne de dimension ≥ 4. Si $W_g = 0$, alors M est localement conformément plate : pour tout $x \in M$, il existe $\delta > 0$ t.q. il existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(B_g(x,\delta))$ t.q.* $\mathrm{Rm}_{e^\varphi g} = 0$.

3.11 Champs de Jacobi

Remarque 3.11.1. *Soit M une variété riemannienne et $p \in M$. On considère une application exponentielle $\exp_p : \mathbb{R}^n \to M$ (dépendant du choix d'une base orthonormée de T_pM). Pour $u, v \in \mathbb{R}^n$, on considère l'application définie par $X(t) = \mathrm{d}\big(\exp_p\big)_{tu}(tv)$, qui est un champ de vecteurs le long de la géodésique γ issue de p avec une vitesse u. Alors :*

$$\ddot{X}(t) = -\,\mathrm{Rm}_g(\gamma(t))\,(\gamma'(t), X(t), \gamma'(t), \cdot)\,.$$

Définition 3.11.2 (Champ de Jacobi)**.** *Soit M une variété riemannienne. Si $\gamma : [a,b] \to M$ est une géodésique, et $X : [a,b] \to TM$ est un champ de vecteurs le long de γ, on dit que X est un* champ de Jacobi *lorsque :*

$$\ddot{X}(t) = -\operatorname{Rm}_g(\gamma(t))\left(\gamma'(t), X(t), \gamma'(t), \cdot\right).$$

Corollaire 3.11.3. *Soit M une variété riemannienne et $p \in M$. On considère une application exponentielle $\exp_p : \mathbb{R}^n \to M$. Soit $u, v \in \mathbb{R}^n$. Alors l'unique champ de Jacobi X le long de la géodésique γ issue de p avec une vitesse u et vérifiant $X(0) = 0$ et $\dot{X}(0) = v$ est donné par :*

$$X(t) = \mathrm{d}\Big(\exp_p\Big)_{tu}(tv).$$

Définition 3.11.4 (Points conjugués le long d'une géodésique)**.** *Soit M une variété riemannienne. Soit $\gamma : [a,b] \to M$ une géodésique. On dit que a et b sont* conjugués *le long de γ s'il existe un champ de Jacobi non nul X le long de γ t.q. $X(a) = X(b) = 0$.*

3.12 Variétés à courbure sectionnelle constante

Exemple 3.12.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$*

(i) *L'*espace euclidien *$\mathbb{R}^n$ (muni de sa métrique standard) est de courbure sectionnelle constante égale à 0.*

(ii) *La* sphère *$\mathbb{S}^n$ (munie de la métrique induite par $\mathbb{R}^{n+1}$) est de courbure sectionnelle constante égale à $+1$.*

(iii) *L'*espace hyperbolique *$\mathbb{H}^n$ (qu'on peut voir comme la boule $\mathbb{B}^n$ munie de la métrique $\frac{4}{(1-r^2)^2}\xi$, ou comme le demi-espace $\mathbb{R}^n_+$ muni de la métrique $\frac{1}{x_1^2}\xi$) est de courbure sectionnelle constante égale à -1.*

Définition 3.12.2 (Revêtement riemannien)**.** *Soit (M,g) et $\left(\widetilde{M}, \widetilde{g}\right)$ deux variétés riemanniennes. Un revêtement $p : \widetilde{M} \to M$ est dit* riemannien *lorsque $p^*g = \widetilde{g}$.*

Théorème 3.12.3. *Toute variété riemannienne complète admet un unique revêtement universel riemannien (à isométrie près).*

Lemme 3.12.4. *Soit $p : \widetilde{M} \to M$ une isométrie locale entre deux variétés riemanniennes complètes. Alors p est un revêtement riemannien.*

Théorème 3.12.5. *Soit M une variété riemannienne de dimension n dont la courbure sectionnelle est constante $K_g = 0$ (resp. -1, $+1$). Alors le revêtement universel de M est $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{S}^n$).*

Démonstration. Soit $p \in M$. On munit T_pM d'une base orthonormée et on considère $\exp_p : \mathbb{R}^n \to M$. Pour $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, le but est d'étudier $\exp_p^* \langle v, w\rangle_{g(u)}$. En étudiant d'abord le champ de Jacobi $X(t) = \mathrm{d}\Big(\exp_p\Big)_{tu}(tv)$, on montre que :

$$\exp_p^* \langle v, w\rangle_{g(u)} = \begin{cases} \frac{\sinh^2(\|u\|)}{\|u\|^2}\langle v, w\rangle & \text{si } K_g = -1 \\ \langle v, w\rangle & \text{si } K_g = 0 \\ \frac{\sin^2(\|u\|)}{\|u\|^2}\langle v, w\rangle & \text{si } K_g = +1 \end{cases}.$$

Dans le cas où $K_g = 0$, on a immédiatement une isométrie locale $\exp_p : \mathbb{R}^n \to M$. Dans le cas où $K_g = -1$, on se donne un point $a \in \mathbb{H}^n$ et on a deux applications $\exp_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{H}^n$ et $\exp_p : \mathbb{R}^n \to M$ t.q. $\exp_p \circ \exp_a^{-1} : \mathbb{H}^n \to M$ est une isométrie locale. Dans le cas où $K_g = +1$, on obtient seulement une application $\mathbb{S}^n \backslash \{-a\} \to M$, qu'on prolonge en une isométrie locale $\mathbb{S}^n \to M$. On conclut enfin à l'aide du Lemme 3.12.4. $\square$

3.13 Seconde variation de la longueur et de l'énergie

Définition 3.13.1 (Perturbation d'un chemin)**.** *Soit M une variété et $\gamma : [a, b] \to M$ un chemin lisse. On appelle* perturbation *de γ toute application lisse $\widetilde{\gamma} : [a, b] \times (-\varepsilon, +\varepsilon) \to M$ t.q. $\widetilde{\gamma}(\cdot, 0) = \gamma$. On dit de plus que γ est une* perturbation propre *de γ lorsque $\gamma(a, \cdot) = \gamma(a)$ et $\gamma(b, \cdot) = \gamma(b)$.*

Proposition 3.13.2. *Soit M une variété riemannienne et $\gamma : [a, b] \to M$ un chemin lisse. On considère une perturbation propre $\widetilde{\gamma} : (t, s) \in [a, b] \times (-\varepsilon, +\varepsilon) \longmapsto \gamma(t, s) = \gamma_t(s) = \gamma_s(t) \in M$. On note $E(s) = E(\gamma_s)$ et $L(s) = L(\gamma_s)$. On note de plus X le champ de vecteurs le long de γ donné par $X(t) = \gamma_t'(0)$. Alors :*

(i) $\frac{1}{2}E'(0) = -\int_a^b \left\langle D_{\gamma'(t)}\gamma'(t), X(t)\right\rangle_{g(\gamma(t))} \mathrm{d}t.$

En particulier, si γ est une géodésique, alors $E'(0) = 0$ et de même $L'(0) = 0$.

(ii) $\frac{1}{2}E''(0) = \int_a^b \left(\left\|\dot{X}(t)\right\|^2_{g(\gamma(t))} - \mathrm{Rm}_g(\gamma(t))(X, \gamma', X, \gamma')\right) \mathrm{d}t.$

$L''(0) = \frac{1}{2}E''(0) - \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\gamma'(t), X(t)\rangle_{g(\gamma(t))}\right)^2 \mathrm{d}t.$

3.14 Cut-locus et rayon d'injectivité

Notation 3.14.1. *Soit M une variété riemannienne complète. Pour $x \in M$ et $X \in T_xM$, on définit :*

$$T(x, X) = \sup\left\{t \in \mathbb{R}_+^*,\ \gamma_{x,X} \text{ est minimisante sur } [0, t]\right\} > 0,$$

où $\gamma_{x,X}$ est la géodésique issue de x à vitesse initiale X.

Remarque 3.14.2. *Si M est une variété riemannienne complète, on a $T(x, \lambda X) = \frac{1}{\lambda}T(x, X)$; on peut donc restreindre $T(x, \cdot)$ à $S_xM = \left\{X \in T_xM,\ \|X\|_{g(x)} = 1\right\}$.*

Proposition 3.14.3. *Soit M une variété riemannienne complète. Alors pour tout $x \in M$, l'application $T(x, \cdot) : S_xM \to \mathbb{R}_+^*$ est continue.*

Définition 3.14.4 (Cut-locus)**.** *Soit M une variété riemannienne complète. Pour $x \in M$, on définit $\mathcal{O}_x = \{tX,\ X \in S_xM,\ t \in [0, T(x, X))\} \subseteq T_xM$. L'ensemble $\mathcal{O}_x$ est un ouvert de T_xM et on considère $\Omega_x = \mathrm{Exp}_x(\mathcal{O}_x)$ ainsi que le* cut-locus *:*

$$\mathrm{Cut}(x) = \mathrm{Exp}_x(\partial\mathcal{O}_x).$$

On a $M = \Omega_x \cup \mathrm{Cut}(x)$.

Théorème 3.14.5. *Soit M une variété riemannienne complète et $x \in M$.*

(i) $\Omega_x \cap \mathrm{Cut}(x) = \varnothing$.

(ii) *Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de T_xM et $\Phi : \mathbb{R}^n \to T_xM$ est l'isomorphisme induit par cette base, alors $\exp_x : \Phi^{-1}(\mathcal{O}_x) \to \Omega_x$ est un difféomorphisme.*

Démonstration. (i) Soit par l'absurde $y \in \Omega_x \cap \mathrm{Cut}(x)$. Comme $y \in \Omega_x$, il existe une géodésique issue de x, passant par y et qui contiue d'être minimisante un peu après y. De plus, $y \in \mathrm{Cut}(x)$, donc y est l'extrémité d'une géodésique minimisante issue de x. En concaténant le début de la seconde géodésique et la fin de la première, on montre qu'elles sont égales, ce qui est absurde. (ii) Montrer que si $\gamma : [a, b] \to M$ est une géodésique et s'il existe $t_0 < b$ t.q. $\gamma(a)$ et $\gamma(t_0)$ sont conjugués le long de γ, alors γ n'est pas minimisante sur $[a, b]$. □

Corollaire 3.14.6. *Soit M une variété riemannienne complète et $x \in M$. Alors $M \setminus \mathrm{Cut}(x)$ est difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 3.14.7. *Soit M une variété riemannienne complète. Pour $x \in M$, on note $i_g(x) = d_g(x, \mathrm{Cut}(x)) > 0$. Alors $i_g : M \to \mathbb{R}_+^*$ est une application continue.*

3.15 Théorème de Bonnet-Myers

Notation 3.15.1. *Soit M une variété riemannienne. Pour $\mu \in \mathbb{R}$, on dit que* $\mathrm{Ric}_g \geq \mu g$ *lorsque* $\mathrm{Ric}_g(x)(X,X) \geq \mu \|X\|_{g(x)}^2$ *pour tous $x \in M$ et $X \in T_xM$.*

Théorème 3.15.2 (Bonnet-Myers)**.** *Soit M une variété riemannienne complète t.q. il existe $\lambda > 0$ t.q.* $\mathrm{Ric}_g \geq \lambda^2(n-1)g$*. Alors :*

$$\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\lambda}.$$

Démonstration. Soit $x, y \in M$. Il s'agit de montrer que $L = d_g(x,y) \leq \frac{\pi}{\lambda}$. Pour cela, on considère une géodésique minimisante $\gamma : [0, L] \to M$ paramétrée par longueur d'arc. On complète $\gamma'(0)$ en une base orthonormée $(\gamma'(0), e_2, \ldots, e_n)$ de T_xM, qu'on transporte parallèlement pour obtenir une base orthonormée $(\gamma'(t), e_2(t), \ldots, e_n(t))$ de $T_{\gamma(t)}M$. On considère ensuite :

$$Y_i(t) = \sin\left(\pi \frac{t}{L}\right) e_i(t).$$

On a $0 \leq L''(0) = \int_a^b \left(\left\| \dot{Y}_i(t) \right\|_{g(\gamma(t))}^2 - \mathrm{Rm}_g\left(\gamma(t)\right)\left(\gamma', Y_i, \gamma', Y_i\right) \right) \mathrm{d}t$. De plus, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle Y_i(t), \gamma'(t) \right\rangle_{g(\gamma(t))} = 0$. On en déduit que $L \geq \frac{\pi}{\lambda}$. $\square$

Remarque 3.15.3. *Le cas d'égalité dans le Théorème de Bonnet-Myers caractérise la sphère.*

Références

[1] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.*

[2] M.P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.*

[3] K.F. Gauß. *Recherches générales sur les surfaces courbes.*

[4] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.*