

HYPERBOLICITIES IN DISCRETE GROUPS

Lectures by François Dahmani
Notes by Alexis Marchand

Institut Fourier
Second semester 2020-21
M2 course

Contents

1	Hyperbolic metric spaces	2
1.1	Definitions	2
1.2	Basic properties	2
1.3	Thinness of triangles	3
1.4	Approximation trees in a hyperbolic space	4
1.5	The four-point condition	5
1.6	Exponential divergence	5
1.7	Quasi-geodesics and quasi-isometry invariance	6
2	Groupes hyperboliques	8
2.1	Lemme de Švarc-Milnor-Efremovich	8
2.2	Propriétés combinatoires et algorithmiques	8
3	Isométries d'un espace hyperbolique	10
3.1	Isométries d'un arbre	10
3.2	Isométries d'un espace hyperbolique	10
3.3	Caractérisation des isométries loxodromiques	11
3.4	Isométries d'un groupe hyperbolique	12
4	Bord des espaces hyperboliques	14
4.1	Le bord en tant qu'ensemble	14
4.2	Bord visuel en un point	14
4.3	Propriétés topologiques du bord	15
4.4	Bord d'un groupe hyperbolique	16
5	Complexes cubiques CAT(0)	16
5.1	Complexes cubiques à courbure négative ou nulle	16
5.2	Groupes d'Artin rectangulaires	17
5.3	Complexes cubiques CAT(0)	18
5.4	Hyperplans	18
5.5	Cubulations	20
6	Groupes à petite simplification	21
6.1	Rappels	21
6.2	Hyperbolicité	21
6.3	Cubulabilité	23

7	Actions affines sur des espaces de Hilbert	23
7.1	Actions affines et propriété (FH)	23
7.2	Cas des groupes libres	24
7.3	Cas des groupes hyperboliques	25
	References	25

1 Hyperbolic metric spaces

1.1 Definitions

Definition 1.1 (Geodesic space). *A metric space (X, d) is **geodesic** if for all $x, y \in X$, there exists a rectifiable path from x to y of length $d(x, y)$.*

Definition 1.2 (Hyperbolic metric space). *Let (X, d) be a geodesic space.*

- A **geodesic triangle** in X is the data of three geodesic segments cyclically connecting three points.
- Given a triangle $T = ([a, b], [b, c], [c, a])$ in X and $\delta \geq 0$, a **δ -centre** of T is a point $p \in X$ s.t. p is at a distance at most δ from $[a, b]$, $[b, c]$ and $[c, a]$.
- The space (X, d) is **δ -hyperbolic** if every triangle has a δ -centre.
We also say that (X, d) is **hyperbolic** if it is δ -hyperbolic for some $\delta \geq 0$.

Example 1.3. (i) *A geodesic space of diameter at most D is D -hyperbolic.*

(ii) *A simplicial tree is 0-hyperbolic.*

(iii) *The hyperbolic plane \mathbb{H}^2 is hyperbolic. This can be proved using the fact that all triangles in \mathbb{H}^2 have area at most π .*

(iv) *The hyperbolic n -space \mathbb{H}^n is hyperbolic because every triangle in \mathbb{H}^n is contained in an embedded copy of \mathbb{H}^2 .*

(v) *The Euclidean plane \mathbb{E}^2 is not hyperbolic.*

1.2 Basic properties

Definition 1.4 (Gromov product). *In a metric space (X, d) , given points $x, y, z \in X$, we define*

$$(x \cdot y)_z = \frac{1}{2} (d(z, x) + d(z, y) - d(x, y)) \geq 0.$$

Lemma 1.5. *If $[x, y]$ is a geodesic in a metric space (X, d) , then*

$$(x \cdot y)_z \leq d(z, [x, y]).$$

Proof. Let $t \in [x, y]$ such that $d(z, [x, y]) = d(z, t)$ (by compactness). Then

$$\begin{aligned} d(z, x) &\leq d(z, t) + d(t, x), \\ d(z, y) &\leq d(z, t) + d(t, y). \end{aligned}$$

Therefore,

$$(x \cdot y)_z \leq \frac{1}{2} (2d(z, t) + d(t, x) + d(t, y) - d(x, y)) = d(z, t) = d(z, [x, y]). \quad \square$$

Lemma 1.6. *If $[x, y]$ is a geodesic in a δ -hyperbolic space (X, d) , then*

$$d(z, [x, y]) \leq (x \cdot y)_z + 4\delta.$$

Hence, $(x \cdot y)_z$ can be seen as an approximation of $d(z, [x, y])$.

Proof. Let c' be a δ -centre of $T = ([x, y], [y, z], [z, x])$, and let $c \in [x, y]$ with $d(c', c) \leq \delta$, so that c is a 2δ -centre of T . Hence, we may pick $u \in [x, z]$ with $d(u, c) \leq 2\delta$ and $v \in [y, z]$ with $d(v, c) \leq 2\delta$. Therefore

$$\begin{aligned} (x \cdot y)_z &= \frac{1}{2} (d(z, x) + d(z, y) - d(x, y)) \\ &= \frac{1}{2} (d(z, u) + d(u, x) + d(z, v) + d(v, y) - d(x, y)) \\ &\geq \frac{1}{2} (d(z, c) - d(u, c) + d(u, x) + d(z, c) - d(v, c) + d(v, y) - d(x, y)) \\ &\geq d(z, c) + \frac{1}{2} (-2d(u, c) + d(c, x) - 2d(v, c) + d(c, y) - d(x, y)) \\ &= d(z, c) - (d(u, c) + d(v, c)) + \frac{1}{2} (d(c, x) + d(c, y) - d(x, y)) \\ &\geq d(z, [x, y]) - 4\delta. \end{aligned} \quad \square$$

Notation 1.7. *If (X, d) is a metric space, $S \subseteq X$ and $r \geq 0$, we write*

$$\mathcal{N}(S, r) = \{x \in X, d(x, S) \leq r\}.$$

Corollary 1.8. *If $[x, y], [x, y]'$ are two geodesics between x and y in a δ -hyperbolic space, then*

$$[x, y] \subseteq \mathcal{N}([x, y]', 4\delta).$$

Proof. Given $z \in [x, y]$, we have

$$d(z, [x, y]') \leq (x \cdot y)_z + 4\delta \leq d(z, [x, y]) + 4\delta = 4\delta. \quad \square$$

1.3 Thinness of triangles

Definition 1.9 (Taut path). *A path α with endpoints x, y in a metric space (X, d) is said to be t -taut (for $t \geq 0$) if*

$$\ell(\alpha) \leq d(x, y) + t.$$

Note that any subpath of a t -taut path is also t -taut.

Lemma 1.10. *If α is a t -taut path between x and y in a δ -hyperbolic space (X, d) , then*

$$(i) \quad \alpha \subseteq \mathcal{N}([x, y], \frac{1}{2}t + 4\delta),$$

$$(ii) \quad [x, y] \subseteq \mathcal{N}(\alpha, t + 8\delta).$$

Proof. (i) If $z \in \alpha$, then

$$\begin{aligned} d(z, [x, y]) &\leq 4\delta + (x \cdot y)_z = 4\delta + \frac{1}{2} (d(z, x) + d(z, y) - d(x, y)) \\ &\leq 4\delta + \frac{1}{2} (\ell(\alpha) - d(x, y)) \leq 4\delta + \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

- (ii) Set $\Delta = \frac{1}{2}t + 4\delta$. Given $w \in [x, y]$, (i) implies the existence of $z \in \alpha$, $a \in [x, w]$ and $b \in [w, y]$ such that $d(z, a), d(z, b) \leq \Delta$. Indeed, consider the closed sets $S_1 = \alpha \cap \mathcal{N}([x, w], \Delta)$ and $S_2 = \alpha \cap \mathcal{N}([w, y], \Delta)$. Note that $S_1, S_2 \neq \emptyset$ because $x \in S_1$ and $y \in S_2$. Moreover, $S_1 \cup S_2 = \alpha$, and α is connected, so we must have $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, which is equivalent to the existence of z, a, b as wanted. Therefore,

$$d(w, a) + d(w, b) = d(a, b) \leq d(z, a) + d(z, b) \leq 2\Delta,$$

so either $d(w, a) \leq \Delta$ or $d(w, b) \leq \Delta$. In both cases, $d(w, \alpha) \leq d(w, z) \leq 2\Delta$ as wanted. \square

Corollary 1.11. (i) *If (X, d) is δ -hyperbolic, then any geodesic triangle $T = ([x, y], [y, z], [z, x])$ is 6δ -thin in the sense that*

$$[x, y] \subseteq \mathcal{N}([y, z] \cup [z, x], 6\delta).$$

- (ii) *Conversely, if (X, d) is geodesic and every geodesic triangle is δ -thin, then X is δ -hyperbolic.*

Proof. (i) As in the proof of Lemma 1.6, let $a \in [x, y]$ be a 2δ -centre. We pick geodesics $[z, a], [a, x], [a, y]$ such that $[x, y] = [a, x]^{-1} \cdot [a, y]$. Hence, the path $[z, a] \cdot [a, y]$ is 4δ -taut because $d(a, [z, y]) \leq 2\delta$. By Lemma 1.10,

$$[z, a] \cdot [a, y] \subseteq \mathcal{N}([z, y], 6\delta).$$

Similarly, $[z, a] \cdot [a, x] \subseteq \mathcal{N}([z, x], 6\delta)$. Therefore

$$[x, y] = [a, x]^{-1} \cdot [a, y] \subseteq \mathcal{N}([z, x] \cup [z, y], 6\delta).$$

- (ii) Consider $S_1 = [x, y] \cap \mathcal{N}([y, z], \delta)$ and $S_2 = [x, y] \cap \mathcal{N}([z, x], \delta)$. The sets S_1 and S_2 are closed in $[x, y]$, non-empty (because $y \in S_1$ and $x \in S_2$), and $S_1 \cup S_2 = [x, y]$ by thinness of T . Since $[x, y]$ is connected, it follows that $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$; now a point of $S_1 \cap S_2$ is a δ -centre for T . \square

1.4 Approximation trees in a hyperbolic space

Notation 1.12. *In this section, (X, d) is a δ -hyperbolic space.*

Remark 1.13. *If c is a δ -centre of a triangle $T = ([x, y], [y, z], [z, x])$, then $[x, c] \cup [y, c] \cup [z, c]$ can be seen as a tripod approximating T .*

Lemma 1.14. *Let $x, y, z \in X$. Consider a t -taut path α from x to y and assume that $d(z, \alpha) = d(z, y)$. Then $\alpha \cup [y, z]$ is $(3t + 24\delta)$ -taut.*

Proof. By Lemma 1.10, we have $[x, y] \subseteq \mathcal{N}(\alpha, t + 8\delta)$. Therefore

$$d(z, [x, y]) \geq d(z, \alpha) - (t + 8\delta) = d(z, y) - (t + 8\delta).$$

Therefore

$$(x \cdot y)_z \geq d(z, [x, y]) - 4\delta \geq d(z, y) - (t + 12\delta).$$

This inequality can be rewritten as

$$d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z) + 2t + 24\delta,$$

hence

$$\ell(\alpha \cup [y, z]) = \ell(\alpha) + \ell([y, z]) \leq d(x, y) + t + d(y, z) \leq d(x, z) + 3t + 24\delta. \quad \square$$

Corollary 1.15. *Let $\mathcal{T} \subseteq X$ be a t -taut tree (i.e. all of whose paths are t -taut). If $y \in \mathcal{T}$ minimises the distance to some point $z \in X$, then $\mathcal{T} \cup [y, z]$ is $(3t + 24\delta)$ -taut.*

Proposition 1.16. *There exists a function $h : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty)$ s.t. if $F \subseteq X$ is finite of size n , then there exists a metric tree \mathcal{T} embedded in X such that, for all $x, y \in F$,*

$$d_{\mathcal{T}}(x, y) - h(n)\delta \leq d_X(x, y) \leq d_{\mathcal{T}}(x, y).$$

Proof. The proposition is obvious for $n = 2$ (with $h(2) = 0$), and Corollary 1.15 allows one to argue by induction on n . \square

1.5 The four-point condition

Remark 1.17. Let x, y, z, t be four points in a tree. Then

$$d(x, y) + d(z, t) \leq \max \{d(x, z) + d(y, t), d(x, t) + d(y, z)\}.$$

Proof. Consider all three possible configurations for x, y, z, t . □

Proposition 1.18. If (X, d) is δ -hyperbolic, then for all $x, y, z, t \in X$,

$$d(x, y) + d(z, t) \leq C\delta + \max \{d(x, z) + d(y, t), d(x, t) + d(y, z)\},$$

where C is a constant independent of δ .

Proof. Let \mathcal{T} be a metric tree approximating $\{x, y, z, t\}$, as in Proposition 1.16. Then Remark 1.17 yields the result with $C = h(4)$. □

Proposition 1.19. Let (X, d) be a geodesic space. Then the following conditions are equivalent:

- (i) Every geodesic triangle in X has a δ_1 -centre for some $\delta_1 \geq 0$.
- (ii) Every geodesic triangle in X is δ_2 -thin for some $\delta_2 \geq 0$.
- (iii) There exists $\delta_3 \geq 0$ s.t. for all $x, y, z, t \in X$,

$$(x \cdot y)_t \geq \min \{(x \cdot z)_t, (y \cdot z)_t\} - \delta_3.$$

From now on, we will say that (X, d) is δ -**hyperbolic** if it satisfies (i)-(iii) with $\delta \geq \max \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$.

Proof. (i) \Leftrightarrow (ii) See Corollary 1.11.

(i) \Rightarrow (iii) Assume that every geodesic triangle in X has a δ_1 -centre. By Proposition 1.18, for all $x, y, z, t \in X$,

$$d(x, y) + d(z, t) \leq C\delta_1 + \max \{d(x, z) + d(y, t), d(x, t) + d(y, z)\}.$$

We may assume without loss of generality that $d(x, y) + d(z, t) \leq C\delta_1 + d(x, z) + d(y, t)$. Let $\delta_3 = \frac{1}{2}C\delta_1$. Then we have

$$d(x, t) + d(z, t) - d(x, z) \leq 2\delta_3 + d(x, t) + d(y, t) - d(x, y),$$

which means that $2(x \cdot z)_t \leq 2\delta_3 + 2(x \cdot y)_t$. □

1.6 Exponential divergence

Notation 1.20. In this section, (X, d) is a δ -hyperbolic space.

Remark 1.21. In \mathbb{H}^2 , the perimeter of a circle of radius r grows exponentially with r .

Lemma 1.22. Let $x_0, \dots, x_n \in X$, with $n = 2^k$. Then

$$[x_0, x_n] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathcal{N}([x_i, x_{i+1}], k\delta).$$

Proof. Let $x \in [x_0, x_n]$. By δ -thinness of the geodesic triangle $([x_0, x_{2^{k-1}}], [x_{2^{k-1}}, x_n], [x_n, x_0])$, we may assume without loss of generality that there exists $x' \in [x_0, x_{2^{k-1}}]$ s.t. $d(x, x') \leq \delta$. Now by induction on k , there exists $0 \leq i < 2^{k-1}$ s.t. $d(x', [x_i, x_{i+1}]) \leq (k-1)\delta$, so that $d(x, [x_i, x_{i+1}]) \leq k\delta$. □

Proposition 1.23. *There are constants $\mu, K > 0$ (depending on δ) s.t. for all $p \in X$ and $r \geq 0$, if α is a path in $X \setminus B(p, r)$ between two points $x, y \in S(p, r)$, then*

$$\ell(\alpha) \geq e^{\mu d(x,y)} - K.$$

Proof. We subdivide α into n arcs of length 8δ (with the last arc of length $\leq 8\delta$). If $\ell = \ell(\alpha)$, then we have

$$8(n-1)\delta \leq \ell \leq 8n\delta.$$

We may assume that $n \geq 2$ (we want an asymptotic lower bound on ℓ). Pick $k \geq 1$ s.t. $2^{k-1} < n \leq 2^k$. Denote by $x = y_0, y_1, \dots, y_n = y$ the subdivision points of α . Let p' be the midpoint of a geodesic segment $[x, y]$. By Lemma 1.22, there is $0 \leq i < n$ s.t.

$$d(p', [y_i, y_{i+1}]) \leq k\delta.$$

Therefore

$$d(p', \alpha) \leq d(p', y_i) \leq d(p', [y_i, y_{i+1}]) + \ell([y_i, y_{i+1}]) \leq (k+8)\delta.$$

Write $\rho = \frac{1}{2}d(x, y)$. We claim that $B(p', \rho - 2\delta) \subseteq B(p, r)$. Indeed, if $z \in B(p', \rho - 2\delta)$, then

$$\begin{aligned} d(p, z) &\leq d(p, p') + d(p', z) < d(p, p') + \rho - 2\delta \\ &= d(p, p') + d(x, y) - \rho - 2\delta \\ &\leq \max\{d(p, x) + d(p', y), d(p, y) + d(p', x)\} + 2\delta - \rho - 2\delta \\ &= r + \rho + 2\delta - \rho - 2\delta = r. \end{aligned}$$

This implies, that if $z \in \alpha$, then $z \in X \setminus B(p, r) \subseteq X \setminus B(p', \rho - 2\delta)$. Hence,

$$d(p', \alpha) \geq \rho - 2\delta = \frac{1}{2}d(x, y) - 2\delta.$$

Combining this with the above upper bound for $d(p', \alpha)$ yields

$$k\delta \geq \frac{1}{2}d(x, y) - 10\delta.$$

Since $n - 1 \geq 2^{k-1}$, we have

$$\ell \geq 8(n-1)\delta \geq 2^{k+2}\delta \geq 2^{\frac{1}{25}d(x,y)-8}\delta. \quad \square$$

1.7 Quasi-geodesics and quasi-isometry invariance

Definition 1.24 (Quasi-geodesic). *Let $\lambda \geq 1, \mu \geq 0$. A (λ, μ) -quasi-geodesic in a metric space (X, d) is a (not necessarily continuous) map $\beta : [t_1, t_2] \rightarrow X$ s.t. for all $t, t' \in [t_1, t_2]$,*

$$\frac{1}{\lambda}|t - t'| - \mu \leq d_X(\beta(t), \beta(t')) \leq \lambda|t - t'| + \mu.$$

Proposition 1.25 (Morse property: stability of quasi-geodesics). *Let $\delta \geq 0, \lambda \geq 1$ and $\mu \geq 0$. There exists $r \geq 0$ s.t. if β_1, β_2 are two (λ, μ) -quasi-geodesics in a δ -hyperbolic metric space (X, d) , then*

$$\beta_1 \subseteq \mathcal{N}(\beta_2, r).$$

Sketch of proof. Since two geodesics with the same endpoints stay at a distance $\leq \delta$ from each other, it suffices to consider the cases $(\beta_1, \beta_2) = (\alpha, \beta)$ and $(\beta_1, \beta_2) = (\beta, \alpha)$, where α is a geodesic and β is a (λ, μ) -quasi-geodesic. We denote by a, b the common endpoints of α, β .

We first show that there exists $r = r(\delta, \lambda, \mu)$ s.t. $\alpha \subseteq \mathcal{N}(\beta, r)$. Choose $r_0 \geq 0$ maximal s.t. there exists $p \in \alpha$ with $d(p, \beta) \geq r_0$. Let $a_0 \in [a, p]$ with $d(a_0, p) = r_0 + 1$ and $b_0 \in [p, b]$ with

$d(p, b_0) = r_0 + 1$. Let $a_1 \in [a, a_0]$ with $d(a_1, a_0) = r_0$ (or $a_1 = a$ if $d(a, a_0) \leq r_0$), and similarly $b_1 \in [b_0, b]$ with $d(b_0, b_1) = r_0$ (or $b_1 = b$). Let $a_2 \in \beta$ with $d(a_1, a_2) \leq r_0$, $b_2 \in \beta$ with $d(b_1, b_2) \leq r_0$. Consider the path

$$\rho = \alpha|_{[a_0, a_1]} \cup [a_1, a_2] \cup \beta|_{[a_2, b_2]} \cup [b_2, b_1] \cup \alpha|_{[b_1, b_0]}.$$

Then

$$\ell(\rho) \leq (6\lambda + 4)r_0 + 2\lambda + \mu.$$

But exponential divergence (Proposition 1.23) implies that

$$\ell(\rho) \geq \exp(Ar_0) - B.$$

These two inequalities give an upper bound on r_0 .

Conversely, let us find r s.t. $\beta \subseteq \mathcal{N}(\alpha, r)$. Pick $p \in \beta$ maximising the distance to α and let $c \in \alpha$ s.t. $d(p, \alpha) = d(p, c)$. We assume that β is parametrised on $[t_1, t_2]$ and we choose t'_1 minimal and t'_2 maximal such that

$$[a, c] \subseteq \mathcal{N}\left(\beta|_{[t_1, t'_1]}, r\right) \quad \text{and} \quad [c, b] \subseteq \mathcal{N}\left(\beta|_{[t'_2, t_2]}, r\right).$$

By ‘minimality’, check that $d(c, \beta(t'_1))$ is uniformly bounded and so is $d(c, \beta(t'_2))$. Therefore, $d(\beta(t'_1), \beta(t'_2))$ is uniformly bounded and so is $d(\beta(t'_1), p)$. \square

Corollary 1.26. *In a δ -hyperbolic metric space, for all $\lambda \geq 1$ and $\mu \geq 0$, there exists $\delta' \geq 0$ s.t. every (λ, μ) -quasi-geodesic triangle has a δ' -centre.*

Definition 1.27 (Quasi-isometry). *Let $\lambda \geq 1$, $\mu \geq 0$, (X, d_X) and (Y, d_Y) be metric spaces. A map $\phi : X \rightarrow Y$ is a (λ, μ) -**quasi-isometric embedding** if for all $x, x' \in X$,*

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x, x') - \mu \leq d_Y(\phi(x), \phi(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + \mu.$$

If in addition, ϕ is μ -quasi-surjective, i.e. for all $y \in Y$, there exists $x \in X$ s.t. $d(\phi(x), y) \leq \mu$, then ϕ is a (λ, μ) -quasi-isometry.

If $\phi : X \rightarrow Y$ is a quasi-isometry, then any quasi-inverse $\psi : Y \rightarrow X$ given by $d(y, \phi\psi(y)) \leq \mu$ is a quasi-isometry as well.

Remark 1.28. • A $(1, 0)$ -quasi-isometry is an isometry.

- A $(\lambda, 0)$ -quasi-isometry is a bilipschitz map.
- A quasi-geodesic is a quasi-isometric embedding of a segment.

Example 1.29. *The inclusion $\mathbb{Z}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ is a quasi-isometry.*

Proposition 1.30. *Quasi-isometry is an equivalence relation on metric spaces.*

Theorem 1.31 (Quasi-isometry invariance of hyperbolicity). *If (X, d_X) and (Y, d_Y) are two quasi-isometric geodesic spaces, and if (X, d_X) is hyperbolic, then so is (Y, d_Y) .*

Proof. Let $\phi : Y \rightarrow X$ be a quasi-isometry and $\psi : X \rightarrow Y$ be a quasi-inverse. Consider a geodesic triangle $T = ([x, y], [y, z], [z, x])$ in Y . Then $\phi(T)$ is a quasi-geodesic triangle. By Corollary 1.26, it has a δ' -centre c , with points p_1, p_2, p_3 on the sides of $\phi(T)$ s.t. $d(c, p_i) \leq \delta'$. Consider $d = \psi(c)$ and $q_i = \psi(p_i)$, and pick points q'_i of T close to q_i . Hence, $\psi(c)$ is a δ'' -centre for T , and δ'' only depends on δ, λ, μ . \square

2 Groupes hyperboliques

2.1 Lemme de Švarc-Milnor-Efremovich

Definition 2.1 (Groupe hyperbolique). *Un groupe Γ est dit **hyperbolique** (au sens des mots, ou de Gromov) s'il est engendré par une partie finie S t.q. $\text{Cay}_S \Gamma$ est hyperbolique.*

Example 2.2. *Les groupes libres de type fini sont hyperboliques.*

Proposition 2.3. *Si S_1, S_2 sont deux parties génératrices finies d'un groupe G , alors $\text{Cay}_{S_1} G$ et $\text{Cay}_{S_2} G$ sont quasi-isométriques.*

En particulier, l'hyperbolicité de $\text{Cay}_S G$ ne dépend pas du choix d'une partie génératrice finie S .

Proof. Poser $A = \max_{s \in S_1} |s|_{S_2}$ et $B = \max_{s \in S_2} |s|_{S_1}$ et montrer que $\frac{1}{A} |g|_{S_2} \leq |g|_{S_1} \leq B |g|_{S_2}$. \square

Lemma 2.4 (Švarc-Milnor-Efremovich). *Soit G un groupe discret agissant par isométries sur un espace géodésique (X, d) qui est propre (i.e. les fermés bornés sont compacts). On suppose que l'action $G \curvearrowright (X, d)$ est :*

- **Propre** : pour tout compact $K \subseteq X$, l'ensemble $\{g \in G, gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini;
- **Cocompacte** : il existe un compact $K \subseteq X$ t.q. $G \cdot K = X$.

Alors G admet une partie génératrice finie S . De plus, $\text{Cay}_S G$ est quasi-isométrique à (X, d) .

Proof. Soit $K \subseteq X$ t.q. $G \cdot K = X$. On pose $K' = \{x \in X, d(x, K) \leq 2\}$ et

$$S = \{g \in G, gK' \cap K' \neq \emptyset\}.$$

Comme l'espace X est propre, K' est compact et S est fini car l'action est propre. Montrons que $G = \langle S \rangle$.

Soit $g \in G$. On fixe $x_0 \in K$ et une géodésique $[x_0, gx_0]$. On pose $x_i \in [x_0, gx_0]$ à distance i de x_0 pour $i \leq n$ et $x_{n+1} = gx_0$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n+1\}$, il existe $g_i \in G$ t.q. $x_i \in g_i K$, et on peut choisir $g_0 = 1$ et $g_{n+1} = g$. On a $g_i K' \cap g_{i+1} K' \neq \emptyset$, donc $s_{i+1} = g_i^{-1} g_{i+1} \in S$. De plus

$$g = g_0^{-1} g_{n+1} = (g_0^{-1} g_1) (g_1^{-1} g_2) \cdots (g_n^{-1} g_{n+1}) = s_1 \cdots s_{n+1} \in \langle S \rangle.$$

L'écriture ci-dessus montre de plus que

$$d_{\text{Cay}_S G}(1, g) \leq n + 1 \leq d_X(x_0, gx_0) + 1.$$

Enfin, si $L = \max_{s \in S} d_X(x_0, sx_0)$ et $D = \text{diam}(K)$, alors l'application $g \mapsto gx_0$ est L -Lipschitz et D -quasi-surjective, ce qui prouve que $\text{Cay}_S G$ est quasi-isométrique à X . \square

Remark 2.5. (i) *L'action $G \curvearrowright \text{Cay}_S G$ vérifie les hypothèses du Lemme 2.4.*

- (ii) *Si X est le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 , on obtient que tout groupe discret agissant de manière propre et cocompacte sur \mathbb{H}^2 est hyperbolique. En particulier, le groupe de surface $\pi_1 \Sigma_g$ est hyperbolique pour $g \geq 2$.*

2.2 Propriétés combinatoires et algorithmiques

Proposition 2.6. *Tout groupe hyperbolique est de présentation finie.*

Plus précisément, si $\text{Cay}_S G$ est δ -hyperbolique, et si

$$R_{36\delta} = \left\{ w \in F(S), w \stackrel{G}{\equiv} 1 \text{ et } |w|_S \leq 36\delta \right\},$$

alors $G = \langle S \mid R_{36\delta} \rangle$.

Proof. Soit $w \in F(S)$ t.q. $w \stackrel{G}{=} 1$. On note $t \mapsto w_t$ le lacet dans $\text{Cay}_S G$ indexé par w et on choisit t_0 maximisant $d(1, w_{t_0})$. On considère des géodésiques $[1, w_{t_0-4\delta}]$ et $[1, w_{t_0+4\delta}]$ (si $t_0 - 4\delta < 0$, on pose $w_{t_0-4\delta} = 1$, et pareillement si $t_0 + 4\delta > |w|_S$). Soit $z \in [1, w_{t_0-4\delta}]$ à distance 9δ de $w_{t_0-4\delta}$.

Notons que $d(w_{t_0-4\delta}, w_{t_0+4\delta}) \leq 8\delta$; par finesse des triangles, on en déduit l'existence de $z' \in [1, w_{t_0+4\delta}]$ t.q. $d(z, z') \leq \delta$. On note maintenant w_0 le mot étiquetant le chemin

$$z \xrightarrow{\text{géod.}} w_{t_0-4\delta} \xrightarrow{w} w_{t_0+4\delta} \xrightarrow{\text{géod.}} z' \xrightarrow{\text{géod.}} z.$$

On a

$$|w_0|_S \leq 9\delta + 8\delta + d(w_{t_0+4\delta}, z') + \delta \leq 2(9 + 8 + 1)\delta = 36\delta.$$

Ainsi, $w_0 \in R_{36\delta}$. Dans le 2-complexe de Cayley associé à S et $R_{36\delta}$, on peut alors homotoper w à un chemin qui a soit un diamètre plus petit, soit un nombre strictement inférieur de sommets à distance maximale de 1.

En itérant ce procédé, on voit que w est homotope au lacet constant. Ainsi, le 2-complexe de Cayley est simplement connexe, ce qui signifie que $\langle S \mid R_{36\delta} \rangle$ est une présentation de G . \square

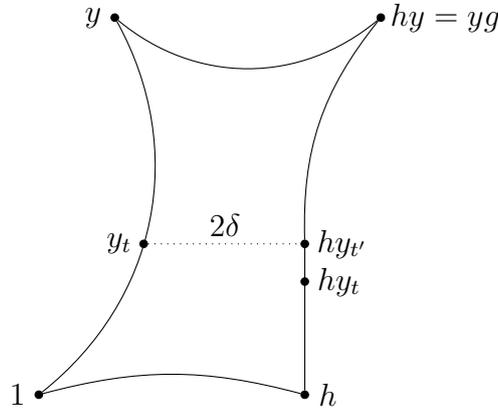
Theorem 2.7. *La fonction de Dehn d'un groupe hyperbolique pour la présentation de la Proposition 2.6 est linéaire.*

Corollary 2.8. *Les groupes hyperboliques ont un problème du mot décidable.*

Lemma 2.9. *Soit G un groupe t.q. $\text{Cay}_S G$ est δ -hyperbolique. Si g, h sont conjugués dans G , alors il existe $x \in G$ t.q. $h = xgx^{-1}$ et*

$$|x|_S \leq |g|_S + |h|_S + 4\delta + \#B(1, \max\{|g|_S, |h|_S\} + 4\delta).$$

Proof. Soit $g, h \in G$ t.q. $h = ygy^{-1}$. On note $t \mapsto y_t$ la paramétrisation d'une géodésique $[1, y]$ dans $\text{Cay}_S G$, avec $L = |y|_S$.



Si $|h|_S + 2\delta < t < L - |g|_S - 2\delta$, alors par δ -finesse des triangles (et donc 2δ -finesse des rectangles),

$$d(y_t, h[1, y]) \leq 2\delta.$$

Soit donc $t' \in [0, L]$ t.q. $d(y_t, hy_{t'}) \leq 2\delta$. Notons que

$$t = d(1, y_t) \leq d(1, h) + d(h, hy_{t'}) + d(hy_{t'}, y_t) \leq |h|_S + t' + 2\delta,$$

et de même

$$L - t = d(y, y_t) \leq d(y, hy) + d(hy, hy_{t'}) + d(hy_{t'}, y_t) \leq |g|_S + L - t' + 2\delta,$$

d'où on déduit $|t - t'| \leq \max\{|g|_S, |h|_S\} + 2\delta$, donc

$$d(y_t, hy_t) \leq \max\{|g|_S, |h|_S\} + 4\delta.$$

Maintenant, si $L - |g|_S - |h|_S - 4\delta > \#B(1, \max\{|g|_S, |h|_S\} + 4\delta)$, alors il existe $t_1 < t_2$ entiers t.q.

$$y_{t_1}^{-1} h y_{t_1} = y_{t_2}^{-1} h y_{t_2}.$$

On pose alors $y' = y_{t_1} y_{t_2}^{-1} y$, de sorte que $h = y' g (y')^{-1}$ et $|y'|_S < |y|_S$. En itérant, on obtient le résultat souhaité. \square

Corollary 2.10. *Les groupes hyperboliques ont un problème de conjugaison décidable.*

3 Isométries d'un espace hyperbolique

3.1 Isométries d'un arbre

Definition 3.1 (Isométries elliptiques et loxodromiques). *Soit T un arbre et $f : T \rightarrow T$ une isométrie.*

- (i) *On dit que f est **elliptique** si elle fixe un sommet ou inverse une arête (auquel cas elle fixe le milieu de l'arête).*
- (ii) *On dit que f est **loxodromique** s'il existe un chemin bi-infini réduit $L \subseteq T$ stable par f et tel que $f|_L$ est une translation non triviale.*

Remark 3.2. *Quitte à remplacer T par sa première subdivision barycentrique, on peut supposer que toute isométrie agit sans inversion d'arête. Ainsi, une isométrie est elliptique ssi elle admet un point fixe.*

Proposition 3.3. *Une isométrie f d'un arbre T est elliptique ou loxodromique.*

Proof. On pose

$$\lambda_f = \min_{v \in V(T)} d(v, f(v))$$

et $T_0(f) = \{v \in T, d(v, f(v)) = \lambda_f\} \neq \emptyset$. Si $\lambda_f = 0$, alors f est elliptique. Sinon, $\lambda_f \geq 1$. Choisissons $v \in T_0(f)$ et considérons le triangle de sommets $v, f(v), f^2(v)$. On note a le premier arc de $[v, f(v)]$ et $w = t(a)$. Alors $f(a)$ est le premier arc de $[f(v), f^2(v)]$. Comme $d(v, f(v)) \leq d(w, f(w))$ par minimalité, on en déduit que $f(v) \in [v, f^2(v)]$. Il s'ensuit en appliquant f^{i-1} que

$$f^i(v) \in [f^{i-1}(v), f^{i+1}(v)]$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On pose alors $L = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i([v, f(v)])$; c'est une ligne bi-infinie réduite invariante par f . Comme $\lambda_f \geq 1$, f induit une translation non triviale sur L , donc f est loxodromique. \square

3.2 Isométries d'un espace hyperbolique

Lemma 3.4 (Fekete). *Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite sous-additive, i.e. telle que $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ pour tous i, j . Alors $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers $\inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$.*

Proposition 3.5. *Soit X un espace hyperbolique. Alors toute isométrie $f : X \rightarrow X$ vérifie une et une seule des trois propriétés suivantes :*

- (i) *Il existe $x \in X$ t.q. l'orbite $\{f^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$ est bornée.*
- (ii) *Pour tout $x \in X$, l'orbite $\{f^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$ est non bornée mais*

$$\frac{1}{n} d(x, f^n(x)) \rightarrow 0.$$

(iii) Il existe $\lambda > 0$ t.q. pour tout $x \in X$,

$$\frac{1}{n}d(x, f^n(x)) \rightarrow \lambda.$$

Proof. Soit $x \in X$. Comme la suite $(d(x, f^n(x)))_{n \geq 0}$ est sous-additive, le Lemme de Fekete (Lemme 3.4) implique que $(\frac{1}{n}d(x, f^n(x)))_{n \geq 1}$ converge. De plus, la limite est indépendante de x car

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}d(y, f^n(y)) &\leq \frac{1}{n}(d(y, x) + d(x, f^n(x)) + d(f^n(x), f^n(y))) \\ &= \frac{1}{n}d(x, f^n(x)) + \frac{2d(x, y)}{n}. \end{aligned} \quad \square$$

Definition 3.6 (Isométries elliptiques, paraboliques et loxodromiques). *Soit X un espace hyperbolique et $f : X \rightarrow X$ une isométrie.*

- (i) On dit que f est **elliptique** si elle admet une orbite bornée (cas (i) de la Proposition 3.5).
- (ii) On dit que f est **parabolique** si l'orbite de tout point x est non bornée mais $\frac{1}{n}d(x, f^n(x)) \rightarrow 0$ (cas (ii)).
- (iii) On dit que f est **hyperbolique** s'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $\frac{1}{n}d(x, f^n(x)) \rightarrow \lambda$ (cas (iii)).

Remark 3.7. *La classification des isométries d'un espace hyperbolique est compatible avec la classification des isométries d'un arbre ou de \mathbb{H}^2 .*

On a montré de plus qu'un arbre n'a pas d'isométrie parabolique.

3.3 Caractérisation des isométries loxodromiques

Lemma 3.8. *Soit X un espace δ -hyperbolique et $f : X \rightarrow X$ une isométrie. On suppose qu'il existe un point $x \in X$ tel que*

$$d(x, f^2(x)) > d(x, f(x)) + 2\delta.$$

Alors l'application $n \in \mathbb{Z} \mapsto f^n(x) \in X$ est une quasi-géodésique.

Proof. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $a_n = d(x, f^n(x))$. Ainsi, l'hypothèse s'écrit $a_2 > a_1 + 2\delta$. Il existe donc une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a_2 \geq a_1 + \alpha + 2\delta.$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. En appliquant la condition des quatre points (Proposition 1.18) à $x, f^2(x), f(x), f^n(x)$, on a

$$\begin{aligned} d(x, f^2(x)) + d(f(x), f^n(x)) \\ \leq \max \left\{ d(x, f(x)) + d(f^2(x), f^n(x)), d(x, f^n(x)) + d(f(x), f^2(x)) \right\} + 2\delta, \end{aligned}$$

ce qu'on peut réécrire $a_2 + a_{|n-1|} \leq \max \{ a_1 + a_{|n-2|}, a_{|n|} + a_1 \} + 2\delta$. On en déduit

$$\max \{ a_{|n-2|}, a_{|n|} \} \geq a_{|n-1|} + a_2 - a_1 - 2\delta \geq a_{|n-1|} + \alpha. \quad (*)$$

Déduisons-en par récurrence sur m que $a_{m+1} \geq a_m + \alpha$. Pour $m = 0$, on obtient $a_1 \geq a_0 + \alpha$ en appliquant (*) avec $n = 1$.

Supposons le résultat prouvé au rang m . L'inégalité (*) avec $n = m + 2$ donne

$$\max \{ a_{m+2}, a_m \} \geq a_{m+1} + \alpha.$$

Si $a_m \geq a_{m+2}$, on en déduit $a_m \geq a_{m+1} + \alpha \geq a_m + 2\alpha$, ce qui est impossible car $\alpha > 0$. Ainsi, $a_{m+2} \geq a_m$, d'où $a_{m+2} \geq a_{m+1} + \alpha$. On en déduit immédiatement que, pour tout $n \geq 0$,

$$a_n \geq n\alpha.$$

De plus, l'inégalité triangulaire donne $a_n \leq na_1$. Ainsi, pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\alpha |m - n| \leq d(f^m(x), f^n(x)) = a_{|m-n|} \leq a_1 |m - n|. \quad \square$$

Proposition 3.9. *Soit X un espace δ -hyperbolique et $f : X \rightarrow X$ une isométrie. Alors f est loxodromique si et seulement si pour tout $x \in X$, l'application $n \in \mathbb{Z} \mapsto f^n(x) \in X$ est une quasi-géodésique.*

Si de plus x est choisi tel que $d(x, f(x)) \leq \inf_{z \in X} d(z, f(z)) + 1$, alors les constantes de quasi-géodésie ne dépendent que de δ et de $\inf_{z \in X} d(z, f(z))$.

Proof. (\Leftarrow) Si λ, μ sont des constantes de quasi-géodésie, alors on a $\frac{n}{\lambda} - \mu \leq d(x, f^n(x))$, donc

$$\lim \frac{1}{n} d(x, f^n(x)) \geq \frac{1}{\lambda} > 0.$$

(\Rightarrow) Supposons que f soit loxodromique et notons $\lambda > 0$ la constante associée. Il suffit de montrer que si $d(x, f(x)) \leq \inf_{z \in X} d(z, f(z)) + 1$, alors $n \mapsto f^n(x)$ est une quasi-géodésique, car on a, pour tout $y \in X$,

$$d(f^m(x), f^n(x)) - 2d(x, y) \leq d(f^m(y), f^n(y)) \leq d(f^m(x), f^n(x)) + 2d(x, y).$$

On fixe donc $x \in X$ tel que

$$d(x, f(x)) \leq \inf_{z \in X} d(z, f(z)) + 1. \quad (*)$$

Notons que $d(x, f^{2k}(x)) - d(x, f^k(x)) = 2k\lambda - k\lambda + o(k) \sim k\lambda$. Si on fixe $k \geq 1$ suffisamment grand, on a $d(x, f^{2k}(x)) \geq d(x, f^k(x)) + 2\delta$. D'après le Lemme 3.8, l'application $n \mapsto f^{kn}(x)$ est une quasi-géodésique, donc $n \mapsto f^n(x)$ est aussi une quasi-géodésique. \square

3.4 Isométries d'un groupe hyperbolique

Remark 3.10. *Soit G un groupe (hyperbolique) et S une partie génératrice finie. Alors G agit sur $\text{Cay}_S G$ par multiplication à gauche. Étant donné un élément $g_0 \in G$ vu comme isométrie de $\text{Cay}_S G$, son type (elliptique, parabolique ou hyperbolique) ne dépend pas du choix de S .*

Proposition 3.11. *Soit G un groupe hyperbolique. Si $g_0 \in G$, alors g_0 est elliptique si et seulement si g_0 est d'ordre fini.*

Proof. (\Leftarrow) Si g_0 est d'ordre fini, alors toute orbite est finie donc bornée.

(\Rightarrow) Si g_0 est elliptique, alors il existe $x \in G$ et $n \geq 1$ tel que $g_0^n x = x$ (par finitude des boules dans le graphe de Cayley). Ainsi, $g_0^n = 1$, donc g_0 est d'ordre fini. \square

Lemma 3.12. *Il existe une constante c telle que, si $f : X \rightarrow X$ est une isométrie non loxodromique d'un espace δ -hyperbolique, si $x \in X$ et si m est le milieu de $[x, f(x)]$, alors*

$$d(m, f(m)) \leq c\delta.$$

Proof. On considère un triangle isocèle T de sommets $x, f(x), f^2(x)$. On se donne un tripode de comparaison, de sommets a, b, c (voir Proposition 1.16). Soit $y_i \in [f^{i-1}(x), f^i(x)]$ tels que y_1, y_2, y_3 ont pour image le centre du tripode. On distingue deux cas :

- $m \in [y_1, f(x)]$. Alors $m, f(m)$ ont même image dans le tripode, donc $d(m, f(m)) \leq h(3)\delta$ avec les notations de la Proposition 1.16.
- $m \in [x, y_1]$. Comme f n'est pas loxodromique, le Lemme 3.8 implique que $d(f^2(x), x) \leq d(f(x), x) + 2\delta$. Or y_3 est le milieu du segment $[x, f^2(x)]$ (car le triangle T est isocèle), et

$$d(x, y_1) = d(x, y_3) = \frac{1}{2}d(x, f^2(x)).$$

Ainsi, l'inégalité précédente implique (après division par 2) que

$$d(x, y_1) \leq d(x, m) + \delta,$$

ce qui signifie que $d(y_1, m) \leq \delta$. Ceci implique que $d(y_2, f(m)) \leq \delta$, et $d(y_1, y_2) \leq h(3)\delta$ comme précédemment, donc $d(m, f(m)) \leq (h(3) + 2)\delta$. \square

Corollary 3.13. *Si G est un groupe hyperbolique, alors il n'existe qu'un nombre fini de classes de conjugaison d'éléments d'ordre fini.*

Proof. Si g_0 est d'ordre fini, alors il est elliptique, donc par le Lemme 3.12, il existe $x \in G$ t.q. $d(g_0x, x) \leq c\delta$. Autrement dit, $d(x^{-1}g_0x, 1) \leq c\delta$, donc g_0 est conjugué à un élément de $\overline{B}(1, c\delta)$, qui est finie. \square

Theorem 3.14. *Soit G un groupe hyperbolique et $g_0 \in G$. On voit g_0 comme une isométrie $G \rightarrow G$. Alors*

- (i) g_0 est elliptique si g_0 est d'ordre fini.
- (ii) g_0 est loxodromique sinon.

En particulier, les groupes hyperboliques ne contiennent pas d'isométrie parabolique.

Proof. Vu la Proposition 3.11, il suffit de prouver que G ne contient pas d'isométrie parabolique. Pour cela, soit $g_0 \in G$ une isométrie non loxodromique. On fixe $x_0 \in G$ et on note x_i le milieu de $[x_0, g^i x_0]$.

- Si la suite $(x_i)_{i \geq 0}$ est bornée, alors il existe $K \geq 0$ t.q. $d(x_0, x_i) \leq K$ pour tout i , d'où

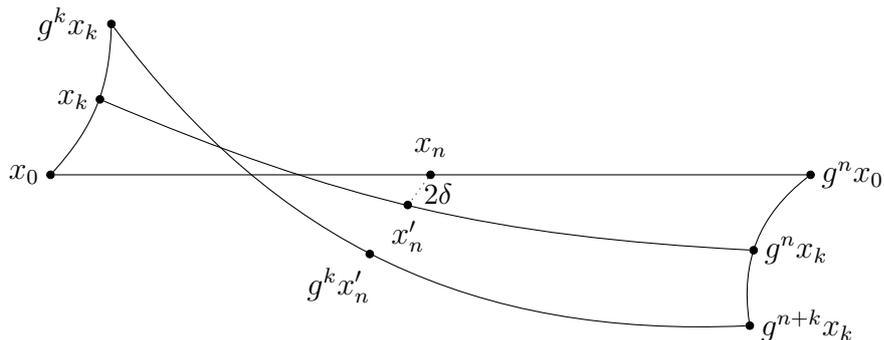
$$d(x_0, g^i x_0) = 2d(x_0, x_i) \leq 2K.$$

Ainsi, la suite $(g^i x_0)_{i \geq 0}$ est bornée, donc il existe $i < j$ t.q. $g^i x_0 = g^j x_0$, d'où $g^{j-i} = 1$.

- Sinon, soit $k_0 \geq 0$ fixé et soit $D = \text{diam} \{x_0, \dots, x_{k_0}\}$. Soit $n \geq 0$ t.q. $d(x_0, x_n) \geq 2(D + \delta)$. Soit $0 \leq k \leq k_0$. Par finesse du quadrilatère de sommets $x_0, x_k, g^n x_k, g^n x_0$, il existe $x'_n \in [x_0, x_k] \cup g^n [x_0, x_k] \cup [x_k, g^n x_k]$ à distance $\leq 2\delta$ de x_n . Si $x'_n \in [x_0, x_k]$, alors

$$d(x_0, x_n) \leq d(x_0, x'_n) + d(x'_n, x_n) \leq d(x_0, x_k) + d(x'_n, x_n) \leq D + 2\delta,$$

ce qui contredit le choix de n . De même, si $x'_n \in g^n [x_0, x_k]$, alors $d(x_0, x_n) = d(g^n x_0, x_n) \leq D + 2\delta$, ce qui est faux.



Ainsi, $x'_n \in [x_k, g^n x_k]$ et $d(x_n, x'_n) \leq 2\delta$.

Dans un arbre d'approximation de $x_k, g^k x_k, g^n x_k, g^{n+k} x_k$ (voir Proposition 1.16), les images de x'_n et $g^k x'_n$ sont proches à $h(4)\delta$ près. Il vient $d(x'_n, g^k x'_n) \leq 2h(4)\delta$. Ainsi,

$$d(x_n, g^k x_n) \leq d(x'_n, g^k x'_n) + 2d(x_n, x'_n) \leq (4 + 2h(4))\delta.$$

On a donc prouvé que $d(x_n, g^k x_n) \leq (4 + 2h(4))\delta$ pour tout $0 \leq k \leq k_0$. Si on choisit $k_0 \geq \#B(1, (4 + 2h(4))\delta)$, alors on peut trouver $0 \leq k_1 < k_2 \leq k_0$ tels que $g^{k_1} x_n = g^{k_2} x_n$, d'où $g^{k_2 - k_1} = 1$.

Dans les deux cas, on voit que g est d'ordre fini, donc elliptique. \square

4 Bord des espaces hyperboliques

4.1 Le bord en tant qu'ensemble

Definition 4.1 (Suite tendant vers un point à l'infini). *Soit X un espace hyperbolique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ tend vers un point à l'infini s'il existe un point $p_0 \in X$ (ou de manière équivalente, si pour tout point $p_0 \in X$),*

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} (x_m \cdot x_n)_{p_0} = +\infty.$$

Definition 4.2 (Équivalence des suites tendant vers un point à l'infini). *Soit X un espace hyperbolique, $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ deux suites tendant vers un point à l'infini. S'équivalent :*

(i) *La suite $(z_n)_{n \geq 0}$ définie par*

$$z_n = \begin{cases} x_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ y_{\frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

tend vers un point à l'infini.

(ii) *Pour tout $p_0 \in X$, $\lim_{m, n \rightarrow \infty} (x_m \cdot y_n)_{p_0} = +\infty$.*

*On dit que $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ sont **équivalentes** lorsque ces conditions sont satisfaites.*

Remark 4.3. *Si $(x_n)_{n \geq 0}$ tend vers un point à l'infini, alors toute suite extraite de $(x_n)_{n \geq 0}$ tend vers un point à l'infini et est équivalente à $(x_n)_{n \geq 0}$.*

Definition 4.4 (Bord d'un espace hyperbolique). *Si X est un espace hyperbolique, son **bord** ∂X est l'ensemble des classes d'équivalence de suites tendant vers un point à l'infini.*

Étant donné $\xi, \zeta \in \partial$ et $p_0 \in X$, on définit

$$(\xi \cdot \zeta)_{p_0} = \inf_{\substack{\xi = [(x_n)] \\ \zeta = [(y_n)]}} \liminf_{n, m \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_m)_{p_0} \in [0, +\infty].$$

On a $(\xi \cdot \zeta)_p < \infty$ si et seulement si $\xi \neq \zeta$.

4.2 Bord visuel en un point

Definition 4.5 (Bord visuel en un point). *Soit X un espace hyperbolique et $x_0 \in X$. Le **bord visuel** de X en x_0 est l'ensemble $\partial_{\text{vis}}(X, x_0)$ des classes d'équivalence de rayons géodésiques $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ avec $\rho(0) = x_0$, pour la relation d'équivalence \sim donnée par :*

$$\rho_1 \sim \rho_2 \iff \sup_{t \geq 0} d(\rho_1(t), \rho_2(t)) < +\infty.$$

L'ensemble $\partial_{\text{vis}}(X, x_0)$ est muni de la topologie quotient de la topologie compacte-ouverte (i.e. de la convergence uniforme sur tout compact).

Proposition 4.6. *Soit X un espace hyperbolique. Alors il y a une application naturelle*

$$\partial_{\text{vis}}(X, x_0) \rightarrow \partial X$$

donnée par $[\rho] \mapsto [(\rho(n))]$. Cette application est injective. De plus, si X est un graphe localement fini (ou plus généralement, un espace complet localement compact), alors c'est une bijection.

Proof. Pour l'injectivité, soit $\rho_1 \not\sim \rho_2$. Alors il existe $m \geq 0$ t.q. $d(\rho_1(m), \rho_2(m)) > 2\delta$. On en déduit par finesse du triangle de sommets $p_0, \rho_1(n), \rho_2(n)$ que pour tout $n > m$, le segment $[\rho_1(n), \rho_2(n)]$ passe à distance $\leq \delta$ de $\rho_1(m)$. Ainsi, la suite $\left((\rho_1(n) \cdot \rho_2(n))_{p_0} \right)_{n \geq 0}$ est bornée, ce qui prouve que $(\rho_1(n)) \not\sim (\rho_2(n))$.

On suppose maintenant que X est un graphe localement fini et on se donne une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ tendant vers un point à l'infini. Pour $n \geq 0$, soit

$$\rho_n : [0, d(x_0, x_n)] \rightarrow X$$

le choix d'une géodésique $[x_0, x_n]$. Un procédé d'extraction diagonale permet de construire $(\rho_{\sigma_i(n)})$ partageant les i premières arêtes. On obtient ainsi une suite de segments géodésiques emboîtés, donc leur union est un rayon géodésique dont l'image dans ∂X est $(x_n)_{n \geq 0}$. (De manière plus générale, on peut utiliser le Théorème d'Ascoli pour extraire de $(\rho_n)_{n \geq 0}$ une sous-suite convergente.) \square

Exemple 4.7. *Soit $X = \mathbb{H}^2 \setminus \{p\}$. Soit $\xi \in \partial \mathbb{H}^2 = \partial X$ et $q \in \mathbb{H}^2$ tel que $p \in (q, \xi)$. Alors ξ n'est pas dans l'image de l'application $\partial_{\text{vis}}(X, p) \rightarrow \partial X$.*

Proposition 4.8. *Soit X un espace hyperbolique. Alors une suite $(\xi_n)_{n \geq 0} \in \partial_{\text{vis}}(X, x_0)$ converge vers $\xi \in \partial X$ si et seulement si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n \cdot \xi)_{x_0} = \infty.$$

Definition 4.9 (Topologie sur ∂X). *Soit X un graphe hyperbolique localement fini. Pour $x_0 \in X$, on a une bijection $\partial_{\text{vis}}(X, x_0) \rightarrow \partial X$. On définit une topologie sur ∂X de sorte que cette bijection soit un homéomorphisme. La Proposition 4.8 implique que cette définition est indépendante de x_0 .*

Remark 4.10. *Pour définir la topologie sur ∂X , il est tentant de considérer les ensembles*

$$\mathcal{U}_N(\xi) = \left\{ \zeta \in \partial X, (\xi \cdot \zeta)_{p_0} > N \right\}$$

pour en faire une base d'ouverts. Mais cette approche ne fonctionne pas telle quelle car $\mathcal{U}_N(\xi)$ n'est pas toujours ouvert dans ∂X .

4.3 Propriétés topologiques du bord

Proposition 4.11. *Si $\phi : X \rightarrow Y$ est une quasi-isométrie entre deux espaces hyperboliques, alors ϕ induit un homéomorphisme $\partial\phi : \partial X \rightarrow \partial Y$.*

Proof. On vérifie d'abord que si $(x_n)_{n \geq 0} \in X$ tend vers un point à l'infini, alors $(\phi(x_n))_{n \geq 0}$ aussi. Soit pour cela $m, n \geq 0$ et soit $c_{m,n}$ un δ -centre du triangle de sommets p_0, x_m, x_n . Alors $\phi(c_{m,n})$ est un δ' -centre du triangle de sommets $\phi(p_0), \phi(x_m), \phi(x_n)$ pour un certain $\delta' \geq 0$. Comme

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(\phi(p_0), \phi(c_{m,n})) = +\infty,$$

il s'ensuit que

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} (\phi(x_m) \cdot \phi(x_n))_{\phi(p_0)} = +\infty,$$

comme voulu.

De même, si $(x_n) \sim (y_n)$, on montre que $(\phi(x_n)) \sim (\phi(y_n))$.

On a donc une application bien définie $\partial\phi : \partial X \rightarrow \partial Y$. Pour vérifier qu'elle est continue, on se donne $(\xi_n) \in \partial X$ t.q. $\xi_n \rightarrow \xi \in \partial X$. Autrement dit, $(\xi_n \cdot \xi)_{p_0} \rightarrow +\infty$. Par un argument similaire au précédent, on montre que $(\partial\phi(\xi_n) \cdot \partial\phi(\xi))_{p_0} \rightarrow \infty$, donc $\partial\phi(\xi_n) \rightarrow \partial\phi(\xi)$ et $\partial\phi$ est continue.

Pour montrer que $\partial\phi$ est un homéomorphisme, soit $\psi : Y \rightarrow X$ un quasi-inverse de ϕ . Alors on a $\partial\psi = (\partial\phi)^{-1}$. \square

Proposition 4.12. *Si X est un graphe hyperbolique localement fini, alors ∂X est compact.*

Proof. On se donne une suite $(\xi_n)_{n \geq 0} \in \partial X$. Pour tout $n \geq 0$, soit $(x_k(n))_{k \geq 0}$ t.q. $\xi_n = [(x_k(n))_{k \geq 0}]$. Quitte à extraire, on peut supposer que

$$(\xi_n \cdot x_n(n))_{p_0} \geq n.$$

On considère alors la suite des segments $([x_0, x_n(n)])_{n \geq 0}$; par le Théorème d'Ascoli, on en extrait une sous-suite convergeant vers un rayon $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ avec $\rho(0) = x_0$. Soit $\xi_\infty = [(\rho(n))_{n \geq 0}] \in \partial X$. On a alors

$$(\xi_\infty \cdot x_n(n))_{p_0} \rightarrow \infty.$$

On sait de plus que $(\xi_n \cdot x_n(n))_{p_0} \rightarrow \infty$, donc

$$(\xi_\infty \cdot \xi_n)_{p_0} \rightarrow \infty.$$

Ainsi, à extraction près, $\xi_n \rightarrow \xi_\infty$, donc ∂X est compact. □

4.4 Bord d'un groupe hyperbolique

Definition 4.13 (Bord d'un groupe hyperbolique). *Si G est un groupe hyperbolique muni d'une partie génératrice finie S , alors $\partial \text{Cay}_S G$ est un espace topologie compact qui est indépendant de S à homéomorphisme près ; on l'appellera le **bord** de G et on le notera ∂G .*

Example 4.14. (i) *Si $G = F_r$ ($r \geq 2$), alors $\text{Cay}_S G$ est un arbre et ∂G est un ensemble de Cantor.*

(ii) *Si G est le groupe fondamental d'une surface hyperbolique compacte sans bord, alors G agit proprement cocompactement par isométries sur \mathbb{H}^2 , donc le Lemme de Švarc-Milnor-Efremovich (Lemme 2.4) implique que G est quasi-isométrique à \mathbb{H}^2 , d'où $\partial G \simeq \mathbb{S}^1$.*

(iii) *Si G est le groupe fondamental d'une surface hyperbolique à bord, alors G est un groupe libre, donc ∂G est un ensemble de Cantor.*

(iv) *Si G est le groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte de dimension 3 sans bord, alors G est quasi-isométrique à \mathbb{H}^3 , d'où $\partial G \simeq \mathbb{S}^2$.*

(v) *Si G est le groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte de dimension 3 à bord, alors ∂G est un tapis de Sierpinski.*

Remark 4.15. • *Si G est un groupe hyperbolique avec $\partial G \simeq \mathbb{S}^1$, alors G est virtuellement le groupe fondamental d'une surface hyperbolique compacte sans bord.*

• *(Champetier) Si G est un groupe de présentation finie "générique", alors G est hyperbolique et son bord est une éponge de Menger.*

Conjecture 4.16 (Cannon). *Soit G un groupe hyperbolique avec $\partial G \simeq \mathbb{S}^2$. Alors G est virtuellement un réseau de $PSL_2\mathbb{C}$ (i.e. le groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte de dimension 3 sans bord).*

5 Complexes cubiques CAT(0)

5.1 Complexes cubiques à courbure négative ou nulle

Definition 5.1 (Complexe cubique). • *Un n -cube est une copie de $[0, 1]^n$.*

- Étant donné un n -cube $[0, 1]^n$, le **sous-cube** associé à une partie $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ et à $\varepsilon \in \{0, 1\}^I$ est

$$C_I = \{x \in [0, 1]^n, \forall i \in I, x_i = \varepsilon_i\}.$$

- Un **complexe cubique** X est une collection de cubes et une relation d'identification de certains sous-cubes de même dimension.
- Le **lien** $\text{Lk}(v)$ d'un 0-cube (i.e. d'un sommet) v est la sphère de rayon $\frac{1}{3}$ autour de v (pour la métrique euclidienne des cubes adjacents).

De manière équivalente, $\text{Lk}(v)$ est le complexe ayant un sommet pour chaque arête orientée de X issue de v , et un $(n-1)$ -simplexe entre les sommets correspondant aux arêtes de tout n -cube dont v est un 0-cube.

Definition 5.2 (Complexe cubique à courbure négative ou nulle). Un complexe cubique X est dit à **courbure négative ou nulle** (c.n.n.) si le lien de tout 0-cube v est **drapeau** (**flag** en anglais), i.e. si $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$ sont des sommets de $\text{Lk}(v)$ deux-à-deux adjacents, alors ils engendrent un unique simplexe.

- Example 5.3.** (i) Voir le tore comme quotient d'un carré définit une structure de complexe cubique à c.n.n.
- (ii) Voir la surface hyperbolique de genre $g \geq 2$ comme quotient d'un $4g$ -gone définit aussi une structure de complexe cubique à c.n.n. (après avoir ajouté un sommet central au $4g$ -gone et certains rayons).

Remark 5.4. Si X est un complexe cubique tel que le lien de tout sommet est un graphe de maille (girth en anglais) au moins 4, alors X est à c.n.n. (La maille d'un graphe est la longueur minimale de ses circuits.)

Example 5.5. Si X_1, X_2 sont deux complexes cubiques à c.n.n., alors $X_1 \times X_2$ a une structure naturelle de complexe cubique, et cette structure est à c.n.n. (et $\text{Lk}(v_1, v_2)$ est le joint topologique de $\text{Lk}(v_1)$ et $\text{Lk}(v_2)$).

5.2 Groupes d'Artin rectangulaires

Definition 5.6 (Groupes d'Artin rectangulaires). Soit Γ un graphe simplicial. Le **groupe d'Artin rectangulaire** associé à Γ est

$$G(\Gamma) = \langle \Gamma^{(0)} \mid \forall (v_1, v_2) \in \Gamma^{(1)}, [v_1, v_2] = 1 \rangle.$$

- Example 5.7.** (i) $G(K_n) \cong \mathbb{Z}^n$, où K_n est le graphe complet sur n sommets.
- (ii) $G(K_{m,n}) \cong F_m \times F_n$, où $K_{m,n}$ est le graphe biparti complet de paramètres (m, n) .
- (iii) $G(P_3)$ est le groupe fondamental du complément d'un entrelacs, où P_3 est le chemin à 4 sommets et 3 arêtes.

Remark 5.8. Soit Γ un graphe simplicial. On construit un complexe X avec un seul sommet, une arête pour chaque sommet de Γ , et un carré de bord $aba^{-1}b^{-1}$ pour chaque arête (a, b) de Γ . On obtient ainsi un complexe cubique.

Si la maille de Γ est ≥ 4 , alors X est à c.n.n.

Proof. Soit v l'unique sommet de X . Alors $\text{Lk}(v)$ a deux sommets $a^{\pm 1}$ pour chaque sommet a de Γ , et 4 arêtes $(a^{\pm 1}, b^{\pm 1})$ pour chaque arête (a, b) de Γ . Vu la Remarque 5.4, il suffit de prouver que $\text{Lk}(v)$ n'a pas de 3-cycle. Mais s'il y avait un 3-cycle $(a_1^{\varepsilon_1}, a_2^{\varepsilon_2}, a_3^{\varepsilon_3})$, avec $a_i \in \Gamma^{(0)}$ et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, alors les sommets a_1, a_2, a_3 de Γ doivent être deux-à-deux distincts car on n'a jamais d'arête $(a, a^{\pm 1})$ dans $\text{Lk}(v)$. Il s'ensuit qu'on doit avoir un 3-cycle (a_1, a_2, a_3) dans Γ , ce qui contredit le fait que Γ est de maille ≥ 4 . \square

Remark 5.9. La Remarque 5.8 montre que certains groupes d'Artin rectangulaires sont groupes fondamentaux de complexes cubiques à c.n.n.

En fait, on peut raffiner la construction en ajoutant au complexe X des n -cubes pour chaque n -uplet de générateurs qui commutent (i.e. pour chaque sous-graphe complet de Γ). On obtient ainsi le **complexe de Salvetti**.

Proposition 5.10. Le complexe de Salvetti d'un groupe d'Artin rectangulaire est toujours à c.n.n.

Corollary 5.11. Les groupes d'Artin rectangulaires sont groupes fondamentaux de complexes cubiques à c.n.n.

5.3 Complexes cubiques CAT(0)

Definition 5.12 (Complexe cubique CAT(0)). Un complexe cubique X est dit **CAT(0)** s'il est simplement connexe et à courbure négative ou nulle.

Autrement dit, X est CAT(0) s'il est le revêtement universel d'un complexe cubique à c.n.n.

Remark 5.13. La terminologie est cohérente : un complexe cubique CAT(0) est CAT(0) pour la métrique euclidienne par morceaux.

Theorem 5.14 (du Plan Plat). Soit X un complexe cubique CAT(0), muni d'une action propre et cocompacte d'un groupe (par automorphismes de complexes cubiques).

Alors X est hyperbolique au sens de Gromov si et seulement si X ne contient pas de sous-complexe isométrique au plan euclidien.

Esquisse de preuve. (\Rightarrow) C'est clair : un espace géodésique contenant une copie isométrique de \mathbb{R}^2 n'est pas hyperbolique.

(\Leftarrow) Par invariance par quasi-isométrie, on peut travailler avec le 1-squelette $X^{(1)}$ de X . Si $X^{(1)}$ n'est pas hyperbolique, alors il contient une suite $(Q_n)_{n \geq 1}$ de quadrilatères géodésiques tels que Q_n n'admet pas de n -centre. Par cocompacité de l'action, on peut translater les quadrilatères pour les rendre emboîtés. On montre, en utilisant le fait que les quadrilatères sont géodésiques, que leurs points intérieurs sont tous de valence 4. On obtient ainsi une suite de quadrilatères emboîtés quadrillés ; à la limite on obtient une copie isométrique de \mathbb{R}^2 . \square

5.4 Hyperplans

Definition 5.15 (Hyperplans). • Si $0 \leq i \leq n$, le **i -mi-cube** du cube $[0, 1]^n$ est l'ensemble $\{x \in [0, 1]^n, x_i = \frac{1}{2}\}$.

- Soit X un complexe cubique. Étant données deux arêtes e_1, e_2 de X , on note $e_1 \sim_0 e_2$ si e_1 et e_2 sont les faces opposées d'un 2-cube. On note \sim la clôture transitive de la relation \sim_0 , et on dit que e_1 et e_2 sont **parallèles** lorsque $e_1 \sim e_2$.
- L'**hyperplan** \mathcal{H} dual à l'arête e (aussi noté $\mathcal{H}(e)$) est l'union des mi-cubes intersectant une arête parallèle à e .

Proposition 5.16. Soit X un complexe cubique CAT(0).

(i) Si \mathcal{H} est un hyperplan de X , alors :

- \mathcal{H} est un complexe cubique CAT(0).
- \mathcal{H} est plongé topologiquement (et en fait isométriquement) dans X .
- \mathcal{H} sépare X en deux composantes connexes.

(ii) Si n hyperplans de X s'intersectent deux à deux, alors ils s'intersectent globalement.

Esquisse de preuve. (i) • \mathcal{H} est un complexe cubique CAT(0).

- \mathcal{H} est un complexe cubique.
- \mathcal{H} est à courbure négative ou nulle. En effet, soit v un sommet de \mathcal{H} ; on considère $\text{Lk}_{\mathcal{H}}(v)$. Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ les sommets d'un triangle dans $\text{Lk}_{\mathcal{H}}(v)$; on veut montrer que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ bordent un triangle plein. Dans X , il existe une arête e dont v est le milieu, et des carrés $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ dont $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (qui sont des arêtes de \mathcal{H}) sont médians. Pour $i \neq j$, $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ sont dans un carré de \mathcal{H} , donc il existe un 3-cube C_{ij} de X contenant ce carré et e . On note maintenant x_0 l'une des extrémités de e . En notant z_{ij} l'arête de $C_{ij} \setminus \{e\}$ issue de x_0 , on voit que $\text{Lk}_X(x_0)$ contient un sous-graphe complet de sommets $e, z_{12}, z_{23}, z_{13}$. Mais X est à courbure négative ou nulle, donc $\text{Lk}_X(x_0)$ est drapeau et $e, z_{12}, z_{23}, z_{13}$ bordent un tétraèdre dans $\text{Lk}_X(x_0)$. Ceci signifie que X contient un 4-cube Γ dont C_{12}, C_{23}, C_{13} sont des sous-cubes. Ainsi, l'hyperplan \mathcal{H} contient le mi-cube de Γ associé à e : c'est un 3-cube dont les carrés $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ ($i \neq j$) sont des faces. Ainsi, dans $\text{Lk}_{\mathcal{H}}(v)$, le triangle $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ borde un 2-simplexe. On a prouvé que tout sous-graphe complet de $\text{Lk}_{\mathcal{H}}(v)$ à 3 sommets borde un triangle. On montre ensuite par récurrence que tout sous-graphe complet de $\text{Lk}_{\mathcal{H}}(v)$ à n sommets borde un n -simplexe.
- \mathcal{H} est simplement connexe. Par exemple, si $\dim X \leq 2$, alors \mathcal{H} est un graphe et il s'agit de montrer qu'il est acyclique. Supposons par l'absurde que \mathcal{H} contient un cycle C . Alors X a un anneau (ou un ruban de Möbius) de carrés. Mais X est simplement connexe, donc C borde un sous-complexe D de X qui est topologiquement un disque. De plus, D vérifie la condition de courbure négative ou nulle aux liens : en chaque sommet, on a au moins 4 carrés adjacents. Construisons un complexe S en recollant deux copies de D le long de leur frontière commune ; S vérifie aussi la condition de courbure négative ou nulle. Calculons sa caractéristique d'Euler $\chi(S) = v - e + f$. On a $e = \frac{4f}{2} = 2f$, $v \leq \frac{4f}{4} = f$ (car chaque sommet a au moins 4 carrés adjacents), donc

$$\chi(S) = v - e + f \leq f - 2f + f = 0.$$

C'est impossible car S est topologiquement une sphère, donc $\chi(S) = 2$.

- \mathcal{H} est plongé topologiquement. On utilise un argument de caractéristique d'Euler similaire à celui utilisé pour prouver la simple connexité de \mathcal{H} .
- \mathcal{H} sépare X en deux composantes connexes. Soit e une arête de X , \mathcal{H} l'hyperplan dual à e . Supposons par l'absurde qu'il existe un chemin α dans X entre les extrémités de e . Alors α est homotope à α dans X (par simple connexité), donc e et α bordent un complexe d'homotopie dans X . On prend un carré adjacent à e dans ce complexe et on regarde l'intersection de ce carré avec \mathcal{H} . En itérant ainsi, on montre que \mathcal{H} doit rencontrer α . \square

Theorem 5.17 (Haglund-Wise). *Soit X un complexe cubique (fini) à courbure négative ou nulle "spécial", au sens où :*

- (i) *Tout hyperplan est plongé (pas d'auto-intersection).*
- (ii) *Tout hyperplan est localement séparant (pas de ruban de Möbius).*
- (iii) *Tout hyperplan est non auto-osculateur (i.e. si e_1, e_2 sont deux arêtes orientées de même origine traversant un hyperplan commun, alors $e_1 = e_2$).*
- (iv) *Si $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ sont deux hyperplans s'intersectant dans un cube C , et si e_1, e_2 sont deux arêtes orientées de même origine traversant $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ respectivement, alors $e_1, e_2 \in C$.*

Alors il existe un graphe Γ (fini) et une immersion $X \hookrightarrow R(\Gamma)$ qui est une isométrie locale, où $R(\Gamma)$ est le complexe de Salvetti associé au groupe d'Artin rectangulaire de Γ (voir Remarque 5.9).

Proof. On construit le graphe Γ en prenant pour $\Gamma^{(0)}$ l'ensemble des hyperplans de X , et pour $\Gamma^{(1)}$ la relation d'intersection entre les hyperplans. Rappelons que $R(\Gamma)$ est le complexe cubique à un sommet, dont les arêtes sont indexées par $\Gamma^{(0)}$, et tel que pour tout ensemble de sommets $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \Gamma^{(0)}$ induisant un sous-graphe complet de Γ , on recolle un cube dans $R(\Gamma)$ bordé par les arêtes indexées par v_1, \dots, v_k .

On construit une application $X \rightarrow R(\Gamma)$ comme suit :

- Les sommets de X sont envoyés sur l'unique sommet de $R(\Gamma)$.
- L'arête e de X est envoyée sur l'arête de $R(\Gamma)$ correspondant à l'hyperplan \mathcal{H}_e dual à e . Cela nécessite de choisir une orientation de chaque hyperplan, et une orientation de chaque classe d'équivalence d'arêtes. Ces choix sont possibles grâce à la condition (ii).
- Si C est un cube de X , alors les hyperplans de C s'intersectent tous : les arêtes du cube de $R(\Gamma)$ associé à ses hyperplans bordent un cube de même dimension, et on envoie C sur ce cube.

Ceci définit bien une application $\psi : X \rightarrow R(\Gamma)$.

L'application ψ est une immersion : si deux arêtes e_1, e_2 de X issues d'un même sommet ont même image, alors elles traversent un même hyperplan. Si elles bordent un carré, cela contredit l'hypothèse (i) ; sinon, cela contredit l'hypothèse (iii).

De plus, on peut vérifier que si ψ n'est pas une isométrie locale en un sommet v , alors il existe deux hyperplans traversant deux arêtes adjacentes à v qui s'intersectent dans un cube non adjacent à v , contredisant (iv). Donc ψ est bien une isométrie locale. \square

Theorem 5.18 (Agol-Wise). *Soit X un complexe cubique à courbure négative ou nulle t.q. $\pi_1 X$ est un groupe hyperbolique. Alors X possède un revêtement fini "spécial" au sens de Haglund-Wise (voir Théorème 5.17).*

5.5 Cubulations

Definition 5.19 (Espace à murs). *Soit S un ensemble. Un **mur** est une paire $m = \{W_+, W_-\}$ telle que $S = W_+ \amalg W_-$. Les ensembles W_+, W_- sont appelés **demi-espaces** associés à m . On dit que le mur m **sépare** deux points $x, y \in S$ lorsque $x \in W_+$ et $y \in W_-$ (ou inversement).*

*Un **espace à murs** est un ensemble S muni d'une collection \mathcal{W} de murs, telle que pour tous $x, y \in S$, l'ensemble des murs séparant x et y est fini.*

Exemple 5.20. • *L'ensemble $S = \left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right), 0 \leq k < n \right\}$ a une structure d'espace à murs où les murs sont les diamètres du n -gone unité.*

- *Si X est un complexe cubique $CAT(0)$, alors $X^{(0)}$ a une structure d'espace à murs où les murs sont les partitions données par les hyperplans.*

Definition 5.21 (Construction de Sageev). *On se donne un espace à murs (S, \mathcal{W}) . On construit un complexe cubique $X_{S, \mathcal{W}}$ comme suit :*

- *Un sommet w de $X_{S, \mathcal{W}}$ est le choix, pour chaque mur m de S , d'un demi-espace $w(m)$ associé à m , de telle sorte que :*
 - (i) *Pour tous murs m_1, m_2 , $w(m_1) \cap w(m_2) \neq \emptyset$,*
 - (ii) *Il existe $s_0 \in S$ tel que pour presque tout mur m , $w(m) \ni s_0$.*
- *Deux sommets w_1, w_2 sont adjacents s'ils diffèrent du choix d'un seul demi-espace.*
- *2^k sommets engendrent un k -cube si les choix sont les mêmes pour tout mur de $\mathcal{W} \setminus F$, où $|F| = k$.*

Exemple 5.22. Soit (S, \mathcal{W}) un espace où les murs “ne se croisent pas”, au sens où pour tous murs m_1, m_2 , il existe $w_1 \in m_1$ et $w_2 \in m_2$ t.q. $w_2 \subseteq w_1$. Alors $X_{S, \mathcal{W}}$ est un graphe (car il ne peut pas contenir de carré).

Proposition 5.23. Soit (S, \mathcal{W}) un espace à murs. Alors $X_{S, \mathcal{W}}$ est un complexe cubique $CAT(0)$.

Proof. On montre que $X_{S, \mathcal{W}}$ est connexe, à courbure négative ou nulle (si trois faces d’un cube sont présentes autour d’un sommet, alors le choix avec les trois changements est compatible, donc on a bien un cube).

Reste à prouver que $X_{S, \mathcal{W}}$ est simplement connexe. Pour cela, on considère un lacet ℓ en x_0 et on choisit un point $v \in \ell$ maximisant la distance à x_0 . On note $v_-, v_+ \in \ell$ les sommets précédant et suivant v . Si $v_- = v_+$, on peut homotoper ℓ selon $[v_-, v_+]$. On suppose donc que $v_- \neq v_+$. Le choix v diffère du choix x_0 sur un nombre fini m_1, \dots, m_r de murs de S , et v_{\pm} diffère de v sur un mur $m_{i_{\pm}}$ parmi m_1, \dots, m_r , avec $i_- \neq i_+$. Comme x_0, v_-, v_+, v sont des choix compatibles, on vérifie que le choix où (à partir de v) on a changé m_{i_-} et m_{i_+} est aussi compatible : cela définit un sommet w de $X_{S, \mathcal{W}}$ tel qu’on ait un carré (v, v_+, w, v_-) . On peut homotoper ℓ selon ce carré pour réduire $\max_v d(x_0, v)$. En itérant, on homotope ℓ au lacet trivial. \square

Remark 5.24. Si G est un groupe agissant sur l’espace à murs (S, \mathcal{W}) , alors G agit naturellement sur $X_{S, \mathcal{W}}$.

6 Groupes à petite simplification

6.1 Rappels

Definition 6.1 (Groupe à petite simplification). Soit $\langle S \mid R \rangle$ une présentation de groupe. Une **pièce** de la présentation est un préfixe commun de deux mots distincts parmi les éléments de $R^{\pm 1}$ et leurs permutations cycliques.

On dit que $\langle S \mid R \rangle$ vérifie la **condition de petite simplification** $\mathcal{C}'(\lambda)$ (avec $\lambda \in (0, 1)$) si pour toute pièce ρ préfixe d’un mot r , on a

$$|\rho| < \lambda |r|.$$

Exemple 6.2. Soit $g \geq 2$. Alors le groupe de surface $\pi_1 \Sigma_g = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \rangle$ vérifie $\mathcal{C}'\left(\frac{1}{4g} + \varepsilon\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Lemma 6.3 (Greendlinger). Soit $G = \langle S \mid R \rangle$ une présentation vérifiant $\mathcal{C}'(\lambda)$. Si $w \stackrel{G}{=} 1$, alors il existe une permutation cyclique w' de w , un sous-mot w_0 de w' , ainsi qu’une permutation cyclique r' d’un mot de $R^{\pm 1}$ t.q. w_0 est un sous-mot de r' et

$$|w_0| > (1 - 3\lambda) |r'|.$$

6.2 Hyperbolicité

Proposition 6.4. Les groupes de présentation finie $G = \langle S \mid R \rangle$ à petite simplification $\mathcal{C}'\left(\frac{1}{18}\right)$ sont hyperboliques.

Plus précisément, dans tout triangle géodésique, chaque côté est à distance au plus $\max_{r \in R} |r|$ d’un autre côté.

Proof. Soit T un triangle géodésique dans $X = \text{Cay}_S G$, et considérons un diagramme de Van Kampen réduit D pour T . On appelle **traversante** toute cellule de D adjacente à deux côtés distincts de T . On va montrer que toute cellule de D est traversante.

Supposons par l’absurde que ce n’est pas le cas. Quitte à réduire D , on peut supposer que les côtés de T ne se rencontrent qu’aux sommets du triangle. On construit alors un diagramme ϕ dual à D en prenant un sommet par cellule de D , une arête entre deux sommets $v_1, v_2 \in \phi$ si les cellules

correspondantes se rencontrent en un arc, et une cellule bordées par v_1, \dots, v_n si toutes les cellules correspondantes partagent un sommet commun.

On déclare maintenant que chaque sommet du diagramme ϕ reçoit un poids de $\frac{1}{2}$ par arête de ϕ adjacente. On effectue à ce stade trois observations :

- Le poids total distribué ainsi est le nombre a_ϕ d'arêtes de ϕ .
- Le diagramme ϕ est planaire, simplement connexe, avec une composante de bord, donc on a

$$s_\phi - a_\phi + f_\phi = \chi(\phi) = 1,$$

où s_ϕ, a_ϕ, f_ϕ sont les nombres de sommets, d'arêtes et de faces de ϕ .

- Un sommet v de ϕ correspond à une face traversante si et seulement si c'est un point de coupure (i.e. si $\phi \setminus v$ n'est pas connexe).

On affirme que le nombre de faces non traversantes de D est $\geq \frac{1}{2}(f_\phi - 4)$. Pour le voir, considérons une composante 2-connexe de ϕ (i.e. une composante connexe C de ϕ privé des points de coupure, à laquelle on rajoute les points de coupure). Alors C est simplement connexe, donc on a toujours

$$s_C - a_C + f_C = \chi(C) = 1.$$

De plus, chaque face a au moins trois arêtes, et chaque arête est dans au plus deux faces, d'où

$$a_C \geq \frac{3}{2}f_C.$$

Il vient

$$s_C = 1 + a_C - f_C \geq \frac{1}{2}(f_C + 2) = \frac{1}{2}(f_C - 4) + 3.$$

Mais C a au maximum trois sommets de coupure, ce qui prouve l'affirmation.

Notons de plus que si un sommet v de ϕ correspond à une cellule non traversante F_v de D , alors par géodésicité du triangle T , on a $|\partial D \cap \partial F_v| \leq \frac{1}{2}|\partial F_v|$, donc

$$|\mathring{D} \cap \partial F_v| \leq \frac{1}{2}|\partial F_v|.$$

Par condition de petite simplification, les pièces (qui correspondent aux intersections $\partial F_v \cap \partial F_{v'}$) ont taille $\leq \lambda |\partial F_v|$, donc v a au moins $\frac{1}{2\lambda}$ voisins dans ϕ .

Ainsi, le poids total distribué dans ϕ admet la minoration suivante :

$$a_\phi \geq \underbrace{\frac{1}{2}(f_\phi - 4)}_{\text{faces non traversantes}} \cdot \frac{1}{2\lambda} + \underbrace{3}_{\text{sommets de } T} \cdot \frac{1}{2} + \underbrace{\left(s_\phi - \frac{1}{2}(f_\phi - 4) - 3\right)}_{\text{sommets restant de } \phi} \cdot 1,$$

d'où $\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \geq s_\phi - a_\phi + f_\phi + \left(\frac{1}{4\lambda} - \frac{3}{2}\right)f_\phi$, ce qui donne

$$f_\phi \leq \frac{4 - 6\lambda}{1 - 6\lambda}.$$

Mais si on avait $f_\phi \geq 1$, alors il existe une face non traversante de D , donc $\frac{1}{2\lambda}$ sommets intérieurs de D (par condition de petite simplification). Ainsi, $f_\phi \geq \frac{1}{2\lambda}$, ce qui donne

$$\frac{1}{2\lambda} \leq \frac{4 - 6\lambda}{1 - 6\lambda}.$$

Mais cette inégalité est fautive lorsque $\lambda \leq \frac{1}{18}$. □

6.3 Cubulabilité

Remark 6.5 (Murs dans les groupes à petite simplification). Soit $G = \langle S \mid R \rangle$ une présentation vérifiant $\mathcal{C}'(\lambda)$.

On note $\widetilde{X} = \widetilde{X}(S, R)$ le **complexe de Cayley** de $\langle S \mid R \rangle$, i.e. le revêtement universel du 2-complexe obtenu en recollant les relations de R à la rose étiquetée par S .

Pour chaque relation $r \in R$, on considère un disque de bord étiqueté par r . Pour chaque arête e du bord du disque, on définit un **prémur** pour e en reliant le milieu de e au milieu d'une des arêtes (choisie arbitrairement) e' maximisant la distance à e .

Dans \widetilde{X} on appelle **barrière** toute classe d'équivalence pour la clôture transitive de la relation donnée par $m_1 \sim m_2$ si m_1, m_2 sont des prémurs issus d'une arête commune dans deux cellules distinctes.

Toute barrière sépare \widetilde{X} en exactement deux composantes connexes. On le voit en montrant que si p est un chemin entre deux sommets v, w reliés par une arête e , alors la barrière de e coupe p . On montre de plus qu'il n'y a pas d'auto-intersection.

Enfin, deux barrières ne s'intersectent qu'en un point, et trois barrières s'intersectant deux à deux s'intersectent dans la même cellule.

On obtient donc une structure d'espace à murs sur $\widetilde{X}^{(0)}$, ce qui permet d'effectuer la construction de Sageev (voir Définition 5.21) pour cubuler \widetilde{X} .

7 Actions affines sur des espaces de Hilbert

7.1 Actions affines et propriété (FH)

Definition 7.1 (Groupes unitaire et affine d'un espace de Hilbert). Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert.

- Le **groupe unitaire** de \mathcal{H} est $U(\mathcal{H}) = \{\varphi \in GL(\mathcal{H}), \forall v \in \mathcal{H}, \|\varphi(v)\| = \|v\|\}$.
- Le **groupe (isométrique) affine** de \mathcal{H} est

$$\text{Aff}(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \rtimes U(\mathcal{H}).$$

Son action sur \mathcal{H} est donnée par

$$(v, \varphi) \cdot w = v + \varphi(w).$$

Remark 7.2. Si G est un groupe (discret, de type fini), il possède toujours des représentations dans des espaces de Hilbert, par exemple la **représentation régulière** $G \rightarrow U(\ell^2(G))$ donnée par

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x).$$

On se demande si G possède une représentation affine intéressante dans un espace de Hilbert. Par exemple, G possède-t-il une représentation affine sans point fixe ?

Proposition 7.3. Une application $g \in G \mapsto (c(g), \pi(g)) \in \text{Aff}(\mathcal{H})$ est un morphisme de groupes si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- $\pi : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ est un morphisme de groupes,
- $c : G \rightarrow \mathcal{H}$ est un **cocycle** :

$$\forall g, h \in G, c(gh) = c(g) + \pi(g)c(h).$$

Proposition 7.4. On considère une représentation $g \in G \mapsto (c(g), \pi(g)) \in \text{Aff}(\mathcal{H})$. Alors cette représentation admet un point fixe $d \in \mathcal{H}$ si et seulement si le cocycle c est un **cobord** du 0-cycle d :

$$\forall g \in G, c(g) = d - \pi(g)d.$$

Remark 7.5. Vu les propositions ci-dessus, le problème de savoir si G admet une action affine sans point fixe sur \mathcal{H} devient : G admet-il un cocycle $c : G \rightarrow \mathcal{H}$ qui n'est pas un cobord ?

Definition 7.6 (Propriété (FH)). Soit G un groupe (discret, de type fini) G . S'équivalent :

- (i) Toute action (isométrique) affine de G sur un espace de Hilbert admet un point fixe.
- (ii) Tout cocycle $c : G \rightarrow \mathcal{H}$ est un cobord.
- (iii) Pour toute représentation unitaire $\pi : G \rightarrow U(\mathcal{H})$, on a $H^1(G, \pi) = 0$.

On dit alors que G a la **propriété (FH)**.

Example 7.7 (Kazhdan). Pour tout $n \geq 3$, $SL_n(\mathbb{Z})$ a la propriété (FH).

Remark 7.8. Soit $g \in G \mapsto (c(g), \pi(g)) \in \text{Aff}(\mathcal{H})$ une action affine. On dit que $c : G \rightarrow \mathcal{H}$ est un **cocycle propre** si

$$\|c(g)\| \xrightarrow{|g| \rightarrow \infty} \infty.$$

Observons que si un cocycle est propre, alors ce n'est pas un cobord (car le cobord c du 0-cycle d vérifie $\|c(g)\| \leq 2 \|d\|$ pour tout $g \in G$).

L'action affine est dite **propre** si c est un cocycle propre ; dans ce cas, elle est sans point fixe.

7.2 Cas des groupes libres

Notation 7.9. Soit F un groupe libre (de type fini) et T un arbre de Cayley de F . On note $\vec{E}(T)$ l'ensemble des arêtes orientées de T . Soit $\mathcal{H} = \ell^2(\vec{E}(T))$ et on considère $\pi : F \rightarrow U(\mathcal{H})$ la représentation régulière pour l'action $F \curvearrowright \vec{E}(T)$. On note $[g, h]$ le segment de T entre g et h , et $\overrightarrow{[g, h]}$ l'ensemble des arêtes orientées de $[g, h]$ qui pointent vers h .

Proposition 7.10. Soit $c : g \in F \mapsto \mathbf{1}_{\overrightarrow{[1, g]}} - \mathbf{1}_{\overrightarrow{[g, 1]}} \in \ell^2(\vec{E}(T))$.

- (i) c est un cocycle.
- (ii) c est propre.

Proof. (i) Soit $g, h \in F$ et soit γ le centre du tripode de sommets $1, g, gh$. Alors on a

$$\begin{aligned} c(gh) &= \mathbf{1}_{\overrightarrow{[1, \gamma]}} + \mathbf{1}_{\overrightarrow{[\gamma, gh]}} - \mathbf{1}_{\overrightarrow{[gh, \gamma]}} - \mathbf{1}_{\overrightarrow{[\gamma, 1]}} \\ &= \left(\mathbf{1}_{\overrightarrow{[1, \gamma]}} + \mathbf{1}_{\overrightarrow{[\gamma, g]}} \right) + \left(\mathbf{1}_{\overrightarrow{[\gamma, gh]}} + \mathbf{1}_{\overrightarrow{[g, \gamma]}} \right) - \left(\mathbf{1}_{\overrightarrow{[gh, \gamma]}} + \mathbf{1}_{\overrightarrow{[\gamma, g]}} \right) - \left(\mathbf{1}_{\overrightarrow{[\gamma, 1]}} + \mathbf{1}_{\overrightarrow{[g, \gamma]}} \right) \\ &= \mathbf{1}_{\overrightarrow{[1, g]}} + \mathbf{1}_{\overrightarrow{[g, gh]}} - \mathbf{1}_{\overrightarrow{[gh, g]}} - \mathbf{1}_{\overrightarrow{[g, 1]}} \\ &= c(g) + \pi(g)c(h). \end{aligned}$$

- (ii) On a $\|c(g)\|^2 = 2|g| \xrightarrow{|g| \rightarrow \infty} \infty$. □

Corollary 7.11 (Margulis). Tout groupe libre (de type fini) admet une action propre sur un espace de Hilbert, donc n'a pas la propriété (FH).

Proposition 7.12. Si G agit proprement sur un complexe cubique $CAT(0)$, alors il admet une action propre sur un espace de Hilbert, donc n'a pas la propriété (FH).

Esquisse de preuve. Adapter la construction ci-dessus en remplaçant les arêtes (orientées) par des hyperplans (orientés). □

7.3 Cas des groupes hyperboliques

Exemple 7.13. *Il existe des groupes hyperboliques ayant la propriété (FH) :*

- Les réseaux de $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$,
- Les groupes aléatoires à densité $d > \frac{1}{3}$.

Theorem 7.14 (Yu, Alvarez-Lafforgue). *Pour tout groupe hyperbolique G , il existe $p \in [2, \infty)$ t.q. G admette une action propre sur $\ell^p(G \times G)$.*

Esquisse de preuve. Il faut construire un cocycle ... Pour cela, on reformule la construction effectuée dans la Proposition 7.10 pour les groupes libres : on pose

$$d = \mathbb{1}_{\{\vec{e} \in \vec{E}(T), \vec{e} \text{ pointe hors de } 1\}} \in \ell^\infty(\vec{E}(T)).$$

Alors $c(g) = d - \pi(g)d$ pour tout $g \in G$ (d peut être vu comme un point fixe “caché dans ℓ^∞ ” de l’action de G sur $\ell^2(\vec{E}(T))$).

Il s’agit donc de construire un “flot”, i.e. un analogue de d pour les groupes hyperboliques. On part pour cela d’une masse de Dirac en 1, on considère les sphères centrées en x de rayon $10k\delta$, on intersecte la première sphère avec les géodésiques 2δ -tendues, et on répartit la masse de Dirac sur cette intersection. Puis on propage aux sphères successives pour construire le flot. \square

Theorem 7.15 (Lafforgue). *Toute action affine de $SL_3(\mathbb{Z})$ sur ℓ^p ($p \in [2, \infty)$) admet un point fixe.*

References

- [1] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*.