

---

# PHYSIQUE

---

Classe de Mathématiques Supérieures

Cours de Isabelle Fanton

Notes de Alexis Marchand

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Oscillateur Harmonique</b>	<b>1</b>
I	Exemple simple . . . . .	1
II	Quelques graphes . . . . .	2
III	Autres exemples . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Unités et Dimensions</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Propagation d'un Signal</b>	<b>5</b>
I	Exemples de signaux . . . . .	5
II	Ondes progressives . . . . .	5
III	Interférences . . . . .	6
IV	Ondes stationnaires . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Optique Géométrique</b>	<b>8</b>
I	Systèmes étudiés . . . . .	8
II	Lois de Snell-Descartes . . . . .	8
III	Conditions de Gauss . . . . .	9
IV	Lentilles minces . . . . .	9
V	Quelques utilisations des lentilles . . . . .	10
VI	L'œil . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Introduction au Monde Quantique</b>	<b>13</b>
I	Dualité onde-corpuscule pour la lumière et la matière . . . . .	13
II	Fonction d'onde . . . . .	13
III	Particule libre confinée dans un puits infini . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Lois Générales d'Électrocinétique</b>	<b>15</b>
I	Généralités . . . . .	15
II	Lois de Kirchhoff . . . . .	15
III	Les dipôles . . . . .	16
IV	Applications . . . . .	18
V	Quadripôles linéaires . . . . .	20
<b>7</b>	<b>Dipôles Linéaires Passifs en Régime Variable</b>	<b>21</b>
I	Relations courant-tension en convention récepteur . . . . .	21
II	Circuits du premier ordre . . . . .	22
III	Circuits du second ordre . . . . .	24

<b>8 Réseaux Linéaires en Régime Sinusoïdal Forcé</b>	<b>26</b>
I Détermination du régime forcé . . . . .	26
II Étude du circuit RLC série . . . . .	27
<b>9 Réponse Fréquentielle de Systèmes Linéaires</b>	<b>31</b>
I Signaux périodiques . . . . .	31
II Fonction de transfert . . . . .	31
III Modèles simples de filtres passifs . . . . .	32
IV Applications . . . . .	34
<b>10 Cinématique</b>	<b>37</b>
I Mouvement d'un point . . . . .	37
II Mouvement d'un solide . . . . .	40
<b>11 Dynamique du Point en Référentiel Galiléen</b>	<b>41</b>
I Principes fondamentaux et conséquences . . . . .	41
II Exemples de forces . . . . .	42
III Aspect énergétique . . . . .	43
IV Application au mouvement dans le champ de pesanteur uniforme . . . . .	43
<b>12 Approche Énergétique du Mouvement d'un Point</b>	<b>46</b>
I Gradient d'une fonction . . . . .	46
II Cas des forces conservatives . . . . .	46
III Retour sur l'oscillateur harmonique . . . . .	48
<b>13 Incertitudes</b>	<b>50</b>
I Vocabulaire et Notations . . . . .	50
II Calcul d'une incertitude-type . . . . .	50
III Incertitude-type élargie, niveau de confiance et incertitude relative . . . . .	51
IV Incertitudes composées . . . . .	51
<b>14 Mouvement de Particules Chargées dans un Champ Électromagnétique</b>	<b>52</b>
I Force de Lorentz . . . . .	52
II Mouvement dans un champ électrostatique uniforme . . . . .	52
III Mouvement dans un champ magnétostatique uniforme . . . . .	53
IV Mouvement dans un champ électrostatique et magnétostatique uniforme . . . . .	54
<b>15 Pendule Pesant Sans Frottements</b>	<b>56</b>
I Étude théorique du modèle du pendule simple . . . . .	56
II Étude du pendule pesant composé . . . . .	57
<b>16 Moment Cinétique et Applications</b>	<b>59</b>
I Moment cinétique . . . . .	59
II Moment d'une force . . . . .	60
III Théorème du moment cinétique . . . . .	61
IV Approche énergétique du solide en rotation autour d'un axe . . . . .	61
<b>17 Forces Centrales Conservatives</b>	<b>62</b>
I Propriétés . . . . .	62
II Cas du champ newtonien . . . . .	64
III Cas du champ coulombien . . . . .	67

<b>18 Description Macroscopique d'un Système à l'État d'Équilibre</b>	<b>68</b>
I Quelques définitions . . . . .	68
II L'état fluide . . . . .	70
III Pression dans un fluide parfait en équilibre dans le champ de pesanteur uniforme . . . . .	70
IV L'état gazeux . . . . .	71
V Notion d'énergie interne . . . . .	72
VI Corps pur . . . . .	73
<b>19 Premier Principe de la Thermodynamique</b>	<b>75</b>
I Échanges d'énergie . . . . .	75
II Enthalpie . . . . .	76
III Transformations d'un gaz parfait . . . . .	77
IV Quelques transformations . . . . .	78
<b>20 Second Principe de la Thermodynamique</b>	<b>80</b>
I Évolution spontanée d'un système . . . . .	80
II Entropie . . . . .	80
III Cas du gaz parfait . . . . .	82
IV Bilans entropiques . . . . .	84
<b>21 Machines Thermiques</b>	<b>86</b>
I Transformations cycliques d'un système . . . . .	86
II Moteur . . . . .	87
III Machine frigorifique et pompe à chaleur . . . . .	88
IV Applications . . . . .	89
<b>22 Introduction aux Champs Magnétiques</b>	<b>91</b>
I Description . . . . .	91
II Lignes de champ et spectre magnétique . . . . .	91
III Propriétés du champ magnétique . . . . .	91
IV Symétrie des spectres magnétiques . . . . .	92
<b>23 Actions d'un Champ Magnétique</b>	<b>93</b>
I Force de Laplace . . . . .	93
II Application à une barre rectiligne . . . . .	93
III Action d'un champ magnétique sur un moment magnétique . . . . .	94
<b>24 Induction</b>	<b>97</b>
I Lois de l'induction . . . . .	97
II Cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique variable . . . . .	98
III Cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique fixe . . . . .	99
IV Applications . . . . .	100

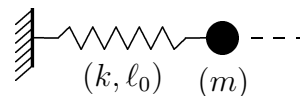
# Chapitre 1

## Oscillateur Harmonique

### I Exemple simple

**Vocabulaire 1.1** (Oscillateur). *Un oscillateur est un système évoluant de façon périodique dans le temps autour d'un équilibre stable. On appelle oscillateur harmonique tout système dont l'évolution est fonction sinusoïdale du temps.*

On considère un ressort  $(k, \ell_0)$  ( $k$  est la constante de raideur,  $\ell_0$  la longueur à vide) fixé à une masse  $(m)$ . L'axe  $(Ox)$  est orienté du point d'attache du ressort vers la masse.



**Formule 1.2** (Tension du ressort). *La tension  $\vec{T}$  du ressort est donnée par :*

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x.$$

D'après la deuxième loi de Newton, on a  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$ . En projetant cette expression sur l'axe  $(Ox)$ , il vient :  $-kx = m\ddot{x}$ , soit

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

**Définition 1.3.** *Une équation différentielle (ED) du deuxième ordre à coefficients constants est du type  $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$ , où  $a, b, c$  sont des constantes.*

Ici,  $f(t) = \text{constante}$ ,  $b = 0$  et  $ac > 0$ .

**Formule 1.4.** *La solution d'une ED de ce type s'écrit*

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t),$$

où  $x_p(t)$  est une solution particulière quelconque et  $x_h(t)$  est une solution de l'équation homogène (i.e avec  $f(t)=0$ ).

Ici, l'équation est homogène, sa solution est

$$x(t) = A \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi \right),$$

où  $A$  et  $\varphi$  sont des constantes à déterminer par les conditions initiales (CI).

## II Quelques graphes

Pour trouver les CI, on note d'abord  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ ,  $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$ . Or, on a

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi), \\ \dot{x}(t) &= -A\omega \sin(\omega t + \varphi), \\ \ddot{x}(t) &= -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \varphi \\ v_0 = -A\omega \sin \varphi \end{cases}.$$

On en déduit les valeurs de  $A$  et  $\varphi$ .

**Formule 1.5** (Période du ressort). *Soit  $\omega$  la pulsation du ressort. Alors sa période  $T$  est donnée par*

$$\omega T = 2\pi.$$

**Formule 1.6** (Déphasage). *Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux signaux sinusoïdaux de phases à l'origine respectives  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  et de même période  $T$ . Alors le déphasage  $\tau$  entre les deux signaux est donné par*

$$\frac{|\varphi_2 - \varphi_1|}{2\pi} = \frac{\tau}{T}.$$

On peut s'intéresser à l'énergie du système. On trouve l'énergie cinétique :  $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$ .

**Définition 1.7** (Énergie potentielle élastique). *L'énergie potentielle élastique est définie par*

$$\mathcal{E}_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}kx^2.$$

On a donc ici  $\mathcal{E}_{pe} = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$ . Au final, on obtient  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{pe} = \frac{1}{2}kA^2$ .

On s'intéresse aux valeurs moyennes des différentes formes d'énergie. On a :

$$\langle \mathcal{E}_c \rangle = \frac{1}{2}kA^2 \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{E}_{pe} \rangle = \frac{1}{2}kA^2 \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle.$$

Or on a  $\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle + \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle}{2} = \frac{1}{2}$ . Donc  $\langle \mathcal{E}_c \rangle = \langle \mathcal{E}_{pe} \rangle = \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{2}\mathcal{E}_m$ .

**Vocabulaire 1.8.** *Comme  $\langle \mathcal{E}_c \rangle = \langle \mathcal{E}_{pe} \rangle$ , on parle d'équipartition de l'énergie.*

### III Autres exemples

#### III.1 Deux ressorts en parallèle

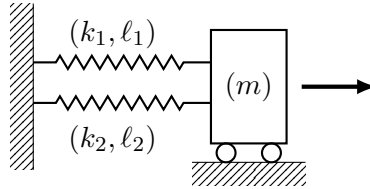
On étudie deux ressorts de paramètres respectifs  $(k_1, \ell_1)$  et  $(k_2, \ell_2)$  attachés à une même masse  $(m)$ . On effectue les mêmes calculs que précédemment, on arrive à l'ED

$$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = \frac{\ell_1 k_1 + \ell_2 k_2}{m},$$

et on trouve

$$x(t) = \frac{\ell_1 k_1 + \ell_2 k_2}{k_1 + k_2} + A \cos \left( \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} t + \varphi \right).$$

Ce système est donc équivalent au système avec un seul ressort de paramètres  $\left(k_1 + k_2, \frac{\ell_1 k_1 + \ell_2 k_2}{k_1 + k_2}\right)$ .



#### III.2 Un ressort vertical

On étudie une masse suspendue à un ressort vertical. On obtient

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{mg + k\ell_0}{m},$$

d'où

$$x(t) = \frac{mg}{k} + \ell_0 + A \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi \right).$$

On remarque que  $x_{eq} = \frac{mg}{k} + \ell_0$  correspond à la position d'équilibre du ressort.

#### III.3 Masse sur un plateau posé sur un ressort

On pose une masse  $(m)$  sur un plateau de masse  $(M)$ , lui-même posé sur un ressort  $(k, \ell_0)$ . On étudie d'abord le mouvement d'ensemble du système {plateau, masse}. Il vient

$$x(t) = \ell_0 - \frac{(m + M)g}{k} + A \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m + M}} t + \varphi \right).$$

On détermine les CI, puis on étudie le système {masse}. Il faut prendre en compte la résistance  $\vec{R}$  du plateau. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, on trouve

$$\|R\| = m\ddot{x} + mg.$$

On peut déterminer l'instant où la bille sera éjectée du plateau en résolvant  $\|R\| = 0$ , i.e.  $\ddot{x} = -g$ .

# Chapitre 2

## Unités et Dimensions

Le *système international d'unités* (SI) est constitué de sept unités de base :

Grandeur	Unité	Symbole	Dimension associée
Longueur	Mètre	m	$L$
Masse	Kilogramme	kg	$M$
Temps	Seconde	s	$T$
Courant électrique	Ampère	A	$I$
Température	Kelvin	K	$\theta$
Quantité de matière	Mole	mol	$N$
Intensité lumineuse	Candela	cd	$J$

Il existe aussi des unités dérivées qui peuvent être exprimées à partir des unités de base (par exemple,  $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ). Par ailleurs, il existe deux unités sans dimensions : le radian (rad) et le stéradian (sr).

On note  $[A]$  la dimension d'une grandeur physique  $A$ . Par exemple,  $[v] = L \cdot T^{-1}$ . On ne peut additionner que des termes ayant la même dimension. On a  $[A \cdot B] = [A] \cdot [B]$  et  $[A^n] = [A]^n$ . Pour les fonctions suivantes :  $\sin u$ ,  $\cos u$ ,  $\tan u$ ,  $\ln u$ ,  $\log u$  et  $e^u$ , la grandeur  $u$  est sans dimension et le résultat est également sans dimension. On note  $[u] = [\sin u] = 1$ .



# Chapitre 3

## Propagation d'un Signal

### I Exemples de signaux

Type de signal	Grandeur physique	Symbole
Signal acoustique	Pression	$P$
Signal électrique	Tension	$U$
Signal électromagnétique	Champ électrique	$\vec{E}$
	Champ magnétique	$\vec{B}$

### II Ondes progressives

On étudie une corde lancée de manière à former une onde. On note  $s(t, x)$  le signal correspondant au déplacement de la corde à la date  $t$  et au point d'abscisse  $x$  (la corde est munie d'un axe  $(Ox)$ ). Pour  $x_1$  un point de la corde, on a :  $s(t, x_1) = s(t + \Delta t, x_1 + \Delta x)$ .

**Définition 3.1** (Célérité). La célérité  $c$  de l'onde est alors définie comme suit :

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Pour tout autre point  $x_2$ , on a donc  $s(t, x_2) = s(t + \Delta t, x_2 + c\Delta t)$ . On voit donc qu'une variable seulement intervient dans l'expression de  $s$ , on notera :

$$u = t - \frac{x}{c},$$

et on a  $s(u) = s(t, x)$ .

**Remarque 3.2.** Si l'onde se propage suivant les  $x$  décroissants, alors il faudra prendre  $u' = t + \frac{x}{c}$  avec  $c > 0$  pour avoir  $s(u') = s(t, x)$ .

On considère un signal  $s(u) = s(t, x)$  avec  $u = t - \frac{x}{c}$ . Si le signal est *sinusoïdal*, on aura :

$$s(u) = A \cos(\omega u + \varphi),$$

où  $A$  est l'amplitude,  $\omega$  la pulsation et  $\varphi$  la phase à l'origine. On aura alors

$$s(t, x) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \varphi\right).$$

**Définition 3.3** (Nombre d'onde). *Dans l'expression précédente, on note*

$$k = \frac{\omega}{c},$$

*et on appelle  $k$  le nombre d'onde.*

### III Interférences

Soient  $s_1$  et  $s_2$  deux signaux sinusoïdaux de même pulsation :  $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  et  $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ . On s'intéresse à  $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ . On a :

$$\begin{aligned} s(t) &= \cos(\omega t) \underbrace{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)}_A - \sin(\omega t) \underbrace{(A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)}_B \\ &= A \left( \cos(\omega t) - \frac{B}{A} \sin(\omega t) \right) \\ &= A \left( \cos(\omega t) - \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \sin(\omega t) \right) \quad \text{où } \phi \text{ est tel que } \tan \phi = \frac{B}{A} \\ &= \frac{A}{\cos \phi} (\cos \phi \cos(\omega t) - \sin \phi \sin(\omega t)) \\ &= \frac{A}{\cos \phi} \cos(\omega t + \phi). \end{aligned}$$

Ainsi,  $s$  est un signal sinusoïdal d'amplitude  $\left| \frac{A}{\cos \phi} \right| = \sqrt{A^2(1 + \tan^2 \phi)} = \sqrt{A^2 + B^2}$  et de pulsation  $\omega$ .

**Définition 3.4** (Vecteurs de Fresnel). *On peut étudier des interférences à un instant  $t$  grâce à des vecteurs de Fresnel dans une base  $(\vec{x}, \vec{y})$ . À chaque signal  $s_k(t) = A_k \cos(\omega t + \varphi_k)$ , on associe un vecteur  $\vec{s}_k$  tel que  $\|\vec{s}_k\| = A_k$  et  $(\vec{x}, \vec{s}_k) \equiv \omega t + \varphi_k \pmod{2\pi}$ . Le signal somme  $s$  correspond alors au vecteur*

$$\vec{s} = \sum_k \vec{s}_k.$$

### IV Ondes stationnaires

Soient  $s_1$  et  $s_2$  deux ondes progressives de sens opposés, mais de même amplitude, de même célérité et de même pulsation :  $s_1(t, x) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_1)$  et  $s_2(t, x) = A \cos(\omega t + kx + \varphi_2)$ . Alors

$$\begin{aligned} s_1(t, x) + s_2(t, x) &= A [\cos(\omega t - kx + \varphi_1) + \cos(\omega t + kx + \varphi_2)] \\ &= 2A \underbrace{\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}_{f(t)} \underbrace{\cos\left(-kx + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)}_{g(x)} \\ &= f(t) \cdot g(x). \end{aligned}$$

**Définition 3.5** (État stationnaire). *Un état stationnaire est le produit d'une fonction du temps par une fonction de l'espace.*

On suppose maintenant que  $s_1$  et  $s_2$  se propagent sur une corde de longueur  $\ell$  fixée à ses deux extrémités. On note  $s(t, x) = s_1(t, x) + s_2(t, x)$ . On a donc  $s(t, 0) = 0$  et  $s(t, \ell) = 0$ . On en déduit d'une part que  $g(0) = 0$  d'où  $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ , et d'autre part que  $g(\ell) = 0$ , soit  $k\ell \equiv 0 \pmod{\pi}$ , ce qui équivaut à

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On obtient donc l'onde stationnaire suivante :

$$s(t, x) = 2A \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)}_{\text{enveloppe}} \cos(\omega t + \phi).$$

**Propriété 3.6.** Une onde stationnaire présente plusieurs points particuliers :

- (i) On a un nœud ssi  $\frac{n\pi x}{\ell} \equiv 0 \pmod{\pi}$  ssi  $x \equiv 0 \pmod{\frac{\ell}{n}}$ . Il y a donc  $(n + 1)$  nœuds.
- (ii) On a un ventre ssi  $\frac{n\pi x}{\ell} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$  ssi  $x \equiv \frac{\ell}{2n} \pmod{\frac{\ell}{n}}$ . Il y a donc  $n$  ventres.

**Propriété 3.7.** La longueur  $\ell$  de la corde détermine la longueur d'onde du mode fondamental :  $\lambda_1 = 2\ell$ . Les longueurs d'onde des autres modes stationnaires sont données par  $\lambda_n = \frac{\lambda_1}{n}$ .

**Propriété 3.8.** Les fréquences temporelles des vibrations des modes propres sont des multiples entiers de la fréquence du fondamental :  $f_n = nf_1$ .

**Propriété 3.9** (Généralisation). La forme d'une onde sur une corde fixée à ses extrémités s'écrit comme une somme de ses différents modes propres.

# Optique Géométrique

## I Systèmes étudiés

**Définition 4.1** (Phénomène lumineux). *On désigne sous le nom de phénomène lumineux l'ensemble des phénomènes auxquels l'œil est sensible.*

**Définition 4.2** (Rayon lumineux). *On appelle rayon lumineux la courbe géométrique correspondant au trajet suivi par la lumière. Un faisceau lumineux est un ensemble de rayons lumineux.*

**Définition 4.3** (Indice d'un milieu). *Pour une onde monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , l'indice de réfraction  $n(\lambda)$  d'un milieu est défini par*

$$n(\lambda) = \frac{c}{v(\lambda)}.$$

**Propriété 4.4** (Formule de Cauchy). *La plupart des milieux transparents ont un indice qui vérifie la formule empirique de Cauchy ( $A$  et  $B$  sont des constantes positives) :*

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}.$$

## II Lois de Snell-Descartes

**Définition 4.5** (Dioptré, miroir). *On appelle dioptré la surface séparant deux milieux transparents. On appelle miroir une surface recouverte d'un mince dépôt métallique réfléchissant. Un système est dit dioptrique s'il ne contient que des dioptrés, catadioptriques s'il contient des dioptrés et des miroirs.*

**Définition 4.6** (Rayon, point et plan d'incidence). *Considérons un rayon lumineux arrivant en un point  $M$  situé sur une surface réfléchissante : ce rayon est appelé rayon incident, le point  $M$  est le point d'incidence, et le plan contenant le rayon incident et la normale à la surface réfléchissante est dit plan d'incidence.*

**Loi 4.7** (Lois de la réflexion).

- (i) *Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence.*
- (ii) *Les angles d'incidence  $i$  et de réflexion  $i'$  vérifient  $i = -i'$ .*

**Loi 4.8** (Lois de la réfraction).

- (i) *Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence.*
- (ii) *Les angles d'incidence  $i_1$  et de réfraction  $i_2$  vérifient  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ .*

### III Conditions de Gauss

**Définition 4.9** (Stigmatisme rigoureux). *Un système optique est rigoureusement stigmatique pour un couple de points  $A, A'$  si tout rayon passant par  $A$  avant la traversée du système passe par  $A'$  après cette traversée.*

**Vocabulaire 4.10.**  *$A$  est le point objet,  $A'$  le point image.  $A$  et  $A'$  sont dits conjugués. Si les rayons lumineux passent effectivement par  $A$ , l'objet est réel, sinon il est virtuel. De même pour l'image.*

**Définition 4.11** (Stigmatisme approché). *Un système optique présente un stigmatisme approché pour un couple de points  $A, A'$  si tout rayon passant par  $A$  passe au voisinage de  $A'$  après avoir traversé le système.*

**Loi 4.12** (Approximation de Gauss). *L'approximation de Gauss est l'approximation linéaire de l'optique géométrique obtenue pour des rayons*

- (i) *proches de l'axe optique,*
- (ii) *peu inclinés par rapport à l'axe optique.*

*Ces rayons sont dits paraxiaux.*

**Définition 4.13** (Systèmes centrés). *Un système est centré s'il admet un axe de symétrie de révolution; cet axe de symétrie est l'axe optique du système.*

**Définition 4.14** (Aplanétisme). *Soit un système optique stigmatique possédant un axe optique  $\Delta$ . Il y a aplanétisme si pour tout objet plan et perpendiculaire à  $\Delta$ , son image est plane et perpendiculaire à  $\Delta$ .*

**Propriété 4.15.** *Un système centré utilisé dans les conditions de Gauss est stigmatique et aplanétique.*

### IV Lentilles minces

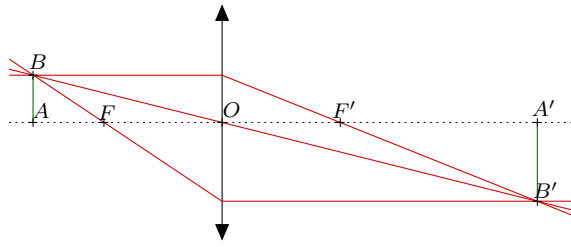
**Définition 4.16** (Lentille mince). *Une lentille mince est un milieu transparent, homogène et isotrope limité par deux dioptres sphériques ou un dioptre sphérique et un dioptre plan.*

**Définition 4.17** (Points caractéristiques). *Une lentille mince possède plusieurs points caractéristiques :*

- (i) *Le centre optique  $O$ .*
- (ii) *Le foyer objet  $F$ .*
- (iii) *Le foyer image  $F'$ .*
- (iv) *Un foyer secondaire objet est un point appartenant au plan focal objet, i.e. le plan perpendiculaire à l'axe optique passant par  $F$ .*
- (v) *Un foyer secondaire image est un point appartenant au plan focal image, i.e. le plan perpendiculaire à l'axe optique passant par  $F'$ .*

**Définition 4.18** (Distance focale). *La distance focale  $f'$  (en m) d'une lentille de foyer image  $F'$  est définie par*

$$f' = \overline{OF'}.$$



**Définition 4.19** (Vergence). La vergence  $V$  (en  $\delta$ ) d'une lentille est définie par

$$V = \frac{1}{f'}.$$

**Loi 4.20** (Construction d'une image).

- (i) Un rayon passant par  $O$  n'est pas dévié.
- (ii) Un rayon incident parallèle à  $(OF)$  émerge de la lentille en passant par  $F'$ .
- (iii) Un rayon incident passant par  $F$  émerge de la lentille parallèle à  $(OF)$ .

**Loi 4.21** (Formules de Descartes).

- (i) Relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}.$$

- (ii) Grandissement transversal :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

**Loi 4.22** (Formules de Newton).

- (i) Relation de conjugaison :

$$\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -f'^2.$$

- (ii) Grandissement transversal :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{f'}{\overline{FA}}.$$

## V Quelques utilisations des lentilles

Une *loupe* est une lentille convergente. Pour un objet réel situé entre  $O$  et  $F$ , la loupe donne une image virtuelle agrandie. Toutefois, le plus important n'est pas le grandissement  $\gamma$ , car une image agrandie éloignée paraîtra petite. On définit donc le grossissement  $G$  comme un rapport d'angles.

**Définition 4.23** (Grossissement). Soit  $P$  le point représentant l'œil de l'observateur. On définit le grossissement  $G$  par

$$G = \frac{\widehat{A'PB'}}{\widehat{APB}} = \frac{\theta'}{\theta} \approx \frac{\tan \theta'}{\tan \theta}.$$

Le *viseur* permet l'observation d'objets à l'aide de deux lentilles. La première lentille, appelée *objectif*, permet de former une image réelle de l'objet observé; cette image est d'autant plus petite que l'objet est éloigné. La seconde lentille, nommée *oculaire*, permet d'observer "à la loupe" l'image précédente. Un *réticule* situé entre les deux lentilles permet de faciliter la mise au point.

La *lunette astronomique* correspond au cas particulier de la visée à l'infini. Le foyer image  $F'_1$  de l'objectif est alors confondu avec le foyer objet  $F_2$  de l'oculaire. Comme l'image d'un point à l'infini est un point à l'infini, la lunette astronomique est dite *afocale*.

**Propriété 4.24.** *Dans le cas d'une lunette astronomique avec un objectif de distance focale  $f'_1$  et un oculaire de distance focale  $f'_2$ , on a*

$$G = -\frac{f'_1}{f'_2}.$$

Les *jumelles* usuelles utilisent le même principe que le viseur et la lunette astronomique; le renversement de l'image est compensé par un second retournement dans un prisme à réflexion totale, ou bien (dans le cas de la lunette de Galilée) en utilisant un oculaire divergent.

Le principe du *microscope* est lui aussi analogue à celui du viseur, mais au lieu d'observer "à la loupe" l'image rapprochée (et rétrécie) d'un objet éloigné, on regarde "à la loupe" la projection agrandie d'un objet proche mais très petit. On peut noter que la quasi-totalité de la lumière incidente coupe l'axe optique au voisinage du foyer image  $F'_2$  de l'oculaire; on appelle *cercle oculaire* la position correspondante, où il est préférable de placer l'œil pour obtenir la meilleure observation.

Le fonctionnement d'un *appareil photographique* utilise différents composants optiques. Lors de l'appui sur le déclencheur, l'obturateur s'ouvre afin de laisser passer la lumière par l'objectif qui va fournir une image nette du sujet à photographier au film ou au capteur numérique. La quantité de lumière entrante est déterminée par la taille de l'ouverture du diaphragme et par la durée d'ouverture de l'obturateur.

## VI L'œil

L'œil peut être modélisé par un système optique simple constitué d'un *diaphragme* (la *pupille*), d'une *lentille convergente de focale variable* (le *cristallin*) et d'un *écran* (la *rétine*).

Quelques ordres de grandeur :

- (i) Le *champ de vision nette* de l'œil est un cône dont l'angle au sommet vaut  $40^\circ$  à  $50^\circ$ .
- (ii) La *limite de résolution angulaire* (i.e. la distance angulaire minimale qui doit séparer deux points pour que ceux-ci soient vus séparément) de l'œil vaut  $1,5'$ .

**Définition 4.25** ( $P_R, P_P$ ). *Le punctum remotum  $P_R$  est le point vu nettement sans accommoder (à l'infini pour l'œil normal). Le punctum proximum  $P_P$  est le point vu nettement en accommodant au maximum (de l'ordre de 20 cm pour l'œil normal).*

**Définition 4.26** (Emmétropie, hypermétropie, myopie). *Un œil normal est dit emmétrype. L'hypermétropie est une anomalie de l'œil dans laquelle l'image d'un objet éloigné se forme en arrière de la rétine. La myopie est une anomalie de l'œil dans laquelle l'image d'un objet éloigné se forme en avant de la rétine.*



# Chapitre 5

## Introduction au Monde Quantique

### I Dualité onde-corpuscule pour la lumière et la matière

**Loi 5.1** (Relations de Planck-Einstein). *Un rayonnement électromagnétique de fréquence  $\nu$  peut être considéré comme un faisceau de particules indivisibles : les photons. Chaque photon transporte un quantum d'énergie vérifiant*

$$\mathcal{E} = h\nu = \hbar\omega,$$

avec  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  et  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ . En outre, la quantité de mouvement du photon est donnée par

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k.$$

**Loi 5.2** (Relation de Louis de Broglie). *Par analogie avec les photons, Louis de Broglie proposa, pour les particules matérielles, de lier la quantité de mouvement à une longueur d'onde caractéristique, appelée longueur d'onde de de Broglie :*

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

### II Fonction d'onde

**Définition 5.3** (Fonction d'onde). *En mécanique quantique, l'évolution d'un système est caractérisée par une fonction d'onde notée  $\Psi$ , qui est un nombre complexe dépendant de l'espace et du temps. Cette fonction représente la densité de probabilité de présence :*

$$|\Psi|^2 = \frac{dP}{dV},$$

où  $P$  est la probabilité de présence et  $V$  le volume.  $\Psi$  doit donc vérifier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx dy dz = 1.$$

**Loi 5.4** (Équation de Schrödinger). *L'évolution de  $\Psi$  est régie par l'équation de Schrödinger :*

$$H\Psi = E\Psi,$$

où l'Hamiltonien  $H$  est un opérateur et l'énergie  $E$  est un scalaire.

**Loi 5.5** (Principe d'incertitude d'Heisenberg). *Considérons comme système physique un corpuscule matériel évoluant dans l'espace. On mesure sa position et sa quantité de mouvement avec une certaine incertitude :  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta p_x$ ,  $\Delta p_y$  et  $\Delta p_z$ . Les inégalités d'Heisenberg donnent une limite à cette précision :*

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar \quad \text{et} \quad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar \quad \text{et} \quad \Delta z \Delta p_z \geq \hbar.$$

### III Particule libre confinée dans un puits infini

#### III.1 Particule libre

Une particule est dite *libre* si elle peut se déplacer sans contrainte dans tout l'espace. L'énergie de la particule peut alors s'écrire

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}.$$

Tous les niveaux d'énergie sont alors accessibles.

#### III.2 Confinement

On considère maintenant une particule libre *confinée* dans un puits de largeur  $\ell$ . On admettra une analogie avec les états d'une corde vibrante de longueur  $\ell$  (voir chapitre 3, section IV). Les longueurs d'onde de la particule doivent donc vérifier

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc les niveaux d'énergie sont quantifiés :

$$\mathcal{E}_n = n^2 \frac{h^2}{8m\ell^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

#### III.3 Niveaux d'énergie

L'énergie d'une particule confinée est *quantifiée* : elle ne peut prendre que certaines valeurs définies à partir de nombres entiers. Ce résultat est différent de celui fourni par la mécanique classique, qui autorise toutes les valeurs positives d'énergie.

Une particule confinée possède un *état fondamental*, dont l'énergie est donnée par  $\mathcal{E}_1 = \frac{h^2}{8m\ell^2}$ .

# Chapitre 6

## Lois Générales d'Électrocinétique

### I Généralités

L'électrocinétique concerne l'étude du mouvement de particules chargées dans la matière sous l'action d'un champ électrique. Ici, on se limitera à l'étude des circuits électriques.

**Vocabulaire 6.1.** *Quelques termes relatifs aux circuits électriques :*

- (i) *Un dipôle est un système relié au reste du circuit par deux bornes.*
- (ii) *Une branche est un ensemble de dipôles reliés entre eux par des fils et disposés en série.*
- (iii) *Un nœud est un point reliant entre eux trois dipôles ou plus.*
- (iv) *Une maille est un ensemble de branches formant un contour fermé que l'on peut parcourir en ne passant qu'une fois par chaque nœud intermédiaire.*

**Définition 6.2** (Intensité du courant électrique). *Le courant électrique correspond à un mouvement de particules chargées. L'intensité  $I$  du courant électrique (en A) mesure le débit de charge traversant une section du conducteur :*

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

**Définition 6.3** (Tension électrique). *Le potentiel électrique  $V$  (en V) est une grandeur physique définie en tout point du circuit. La tension  $U$  est une différence de potentiels entre deux points du circuit :*

$$U_{AB} = V_A - V_B.$$

**Loi 6.4** (Loi d'Ohm). *On considère une résistance de valeur  $R$  (en  $\Omega$ ) traversée par un courant d'intensité  $i$  (en A) et dont les bornes sont à une tension  $u$  (en V). Alors*

$$u = Ri.$$

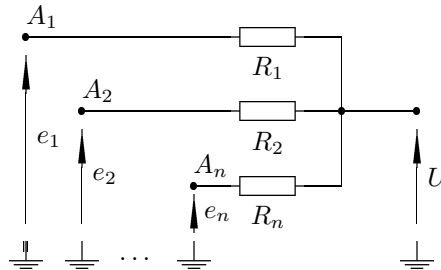
*Ceci s'applique seulement si la résistance est en convention récepteur (voir définition 6.9).*

### II Lois de Kirchhoff

**Loi 6.5** (Loi des mailles). *La somme des tensions aux bornes des branches successives d'une maille parcourue dans un sens déterminé est nulle.*

**Loi 6.6** (Lois des nœuds). *La somme des courants algébriques arrivant à un nœud donné est nulle.*

**Théorème 6.7** (Théorème de Millman). *On considère  $n$  points  $A_1, \dots, A_n$  de potentiels respectifs  $e_1, \dots, e_n$  et reliés à un nœud commun par l'intermédiaire de résistances de valeurs respectives  $R_1, \dots, R_n$ .*



On s'intéresse au potentiel  $U$  de ce nœud. On a

$$U = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{e_k}{R_k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}$$

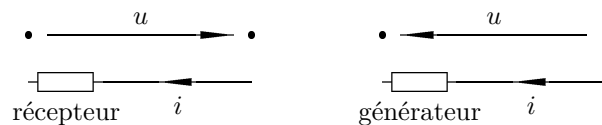
**Théorème 6.8** (Théorème de superposition). *On considère un circuit comportant  $n$  générateurs notés  $(\Gamma_1), \dots, (\Gamma_n)$  ainsi que des dipôles linéaires ; on définit  $A$  et  $B$  deux points du circuit. On appelle  $u_k$  la tension entre  $A$  et  $B$  lorsque seul le générateur  $(\Gamma_k)$  est allumé (un générateur éteint est équivalent à sa résistance interne). On a alors :*

$$U_{AB} = \sum_{k=1}^n u_k.$$

### III Les dipôles

#### III.1 Conventions

**Définition 6.9** (Conventions). *Un dipôle est en convention générateur lorsque le courant qui le traverse est dans le même sens que la tension à ses bornes. Dans le cas contraire, il est en convention récepteur.*



#### III.2 Caractéristiques

**Définition 6.10** (Caractéristique). *La caractéristique d'un dipôle est la relation donnant l'intensité  $i$  en fonction de la tension  $u$ . On a deux valeurs particulières :*

- (i) *L'intensité  $i_0$  correspondant à  $u = 0$  est appelée courant de court-circuit.*
- (ii) *La tension  $u_0$  correspondant à  $i = 0$  est appelée tension à vide.*

**Définition 6.11** (Point de fonctionnement). *Le point de fonctionnement d'un circuit est le point représentatif du plan  $(i, u)$  correspondant au fonctionnement normal de l'association des différents dipôles. Sa détermination est obtenue en écrivant les lois des nœuds et des mailles puis en résolvant le système obtenu.*

**Définition 6.12** (Conductance). *La conductance  $G$  est définie par  $G = \frac{1}{R}$ .*

**Exemple 6.13** (Résistance). *Pour une résistance, on a  $i = Gu$ .*

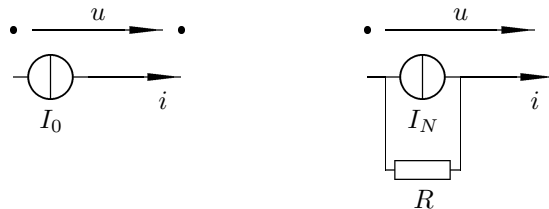
**Exemple 6.14** (Générateurs de tension). *On distingue deux modèles de générateurs de tension :*

- (i) *Pour un générateur idéal, on a  $u = e_0$ .*
- (ii) *Pour un générateur de Thévenin, on a  $i = Ge_T - Gu$ .*

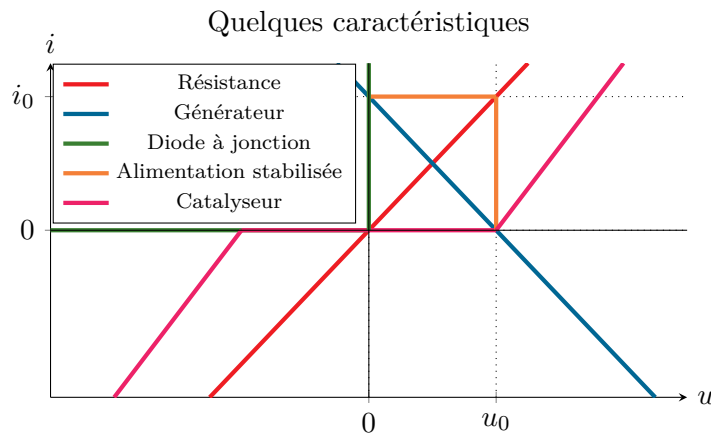


**Exemple 6.15** (Générateurs de courant). *On distingue deux modèles de générateurs de courant :*

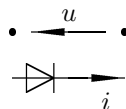
- (i) *Pour un générateur idéal, on a  $i = I_0$ .*
- (ii) *Pour un générateur de Norton, on a  $i = I_N - Gu$ .*



**Remarque 6.16.** *Un générateur de Thévenin de force électromotrice  $e$  et de conductance  $G$  a la même caractéristique qu'un générateur de Norton d'intensité  $I = Ge$ . On peut donc considérer qu'un générateur de tension est équivalent à un générateur de courant.*



**Exemple 6.17** (Diode à jonction). *Pour une diode à jonction idéale, on a  $i = 0$  lorsque  $u < 0$  et  $u = 0$  lorsque  $i > 0$ .*



### III.3 Classifications

**Définition 6.18** (Dipôles symétriques). *Un dipôle est dit symétrique si son fonctionnement n'est pas modifié lorsqu'on permute ses bornes, i.e. si sa caractéristique est impaire.*

**Définition 6.19** (Dipôles actifs et passifs). *Un dipôle dont la caractéristique passe par l'origine est dit passif ; sinon il est actif.*

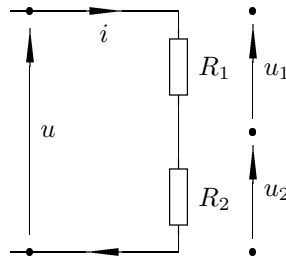
**Définition 6.20** (Dipôles linéaires). *Un dipôle est linéaire si sa caractéristique est une fonction affine.*

**Définition 6.21** (Fonctionnement en générateur ou en récepteur). *Un dipôle fonctionne en générateur s'il fournit une puissance  $\mathcal{P} = ui$  positive ; sinon il fonctionne en récepteur.*

## IV Applications

### IV.1 Diviseurs de tension et de courant

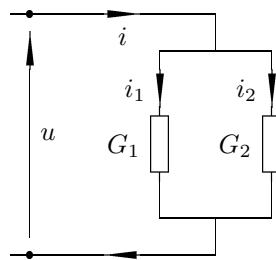
**Propriété 6.22** (Diviseur de tension). *On considère le dipôle suivant :*



On a alors

$$u_1 = u \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad u_2 = u \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

**Propriété 6.23** (Diviseur de courant). *On considère le dipôle suivant :*

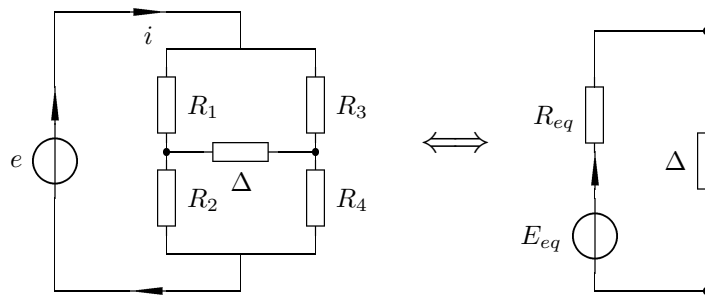


On a alors

$$i_1 = i \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2} \quad \text{et} \quad i_2 = i \cdot \frac{G_2}{G_1 + G_2}.$$

### IV.2 Pont de Wheatstone

On s'intéresse au circuit suivant :



On cherche à exprimer  $E_{eq}$  et  $R_{eq}$ . On détermine premièrement la tension à vide  $u_V = E_{eq}$  en examinant le cas où  $(\Delta)$  est supprimée du circuit. On obtient

$$u_V = e \cdot \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}.$$

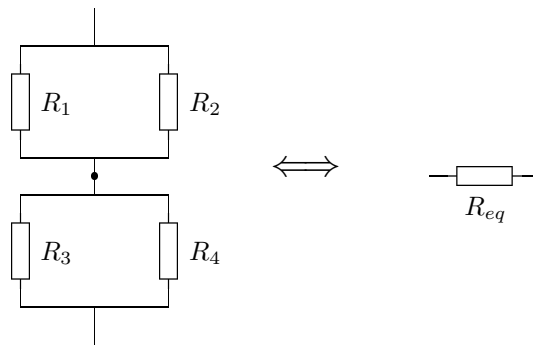
On calcule alors le courant de court-circuit  $i_{CC}$  en considérant le cas où  $(\Delta)$  est remplacé par un fil. On obtient

$$i_{CC} = e \cdot \frac{\frac{R_3}{R_1+R_3} - \frac{R_4}{R_2+R_4}}{\frac{R_1 R_3}{R_1+R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2+R_4}}.$$

Cela nous permet de déterminer que

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Ainsi, on a l'équivalence suivante :

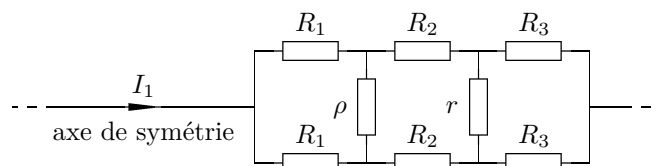


**Vocabulaire 6.24.** On dit que le pont est équilibré lorsque la tension aux bornes de  $(\Delta)$  est nulle. Cela se produit lorsque

$$R_2 R_3 = R_1 R_4.$$

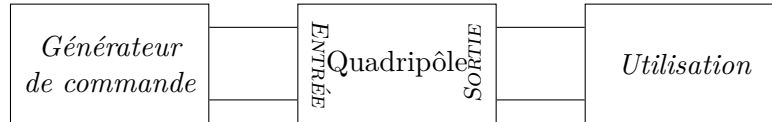
### IV.3 Symétrie

**Loi 6.25** (Principe de symétrie). Si un dipôle présente un axe de symétrie, alors les potentiels des points symétriques sont identiques.



## V Quadripôles linéaires

**Définition 6.26** (Quadripôle linéaire). *Un quadripôle est un composant (ou ensemble de composants) relié au reste du circuit par quatre fils. Il est linéaire s'il ne contient que des générateurs de tension et de courant et des résistances.*



*Deux des bornes du quadripôle constituent l'entrée, et sont caractérisées par une tension et un courant d'entrée, les deux autres constituent la sortie, et sont caractérisées par une tension et un courant de sortie.*

**Propriété 6.27.** *Pour un quadripôle linéaire passif (i.e. une association de résistances), le générateur de commande voit une simple résistance, appelée résistance d'entrée ( $R_e$ ), à ses bornes. De même, l'utilisation voit un générateur de Thévenin, constitué d'un générateur de tension de sortie ( $e_s$ ) et d'une résistance de sortie ( $R_s$ ).*

**Remarque 6.28.** *( $R_e$ ), ( $R_s$ ) et ( $e_s$ ) dépendent du quadripôle mais aussi du générateur de commande et de l'utilisation.*



# Dipôles Linéaires Passifs en Régime Variable

## I Relations courant-tension en convention récepteur

### I.1 Résistances

**Définition 7.1** (Résistance). Une résistance ( $R$ ) est un dipôle caractérisé par

$$u(t) = Ri(t),$$

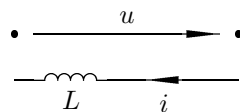
où  $R$  s'exprime en Ohm ( $\Omega$ ).

### I.2 Inductances

**Définition 7.2** (Inductance). Une inductance ( $L$ ) est un dipôle caractérisé par

$$u(t) = L \frac{di}{dt},$$

où  $L$  s'exprime en Henry (H). Une bobine est constituée d'une inductance en série avec une résistance.



**Définition 7.3** (Énergie emmagasinée). Pour une inductance ( $L$ ), on définit l'énergie emmagasinée  $\mathcal{W}_L$  par

$$\mathcal{W}_L = \frac{1}{2} Li^2(t).$$

On a alors  $\mathcal{P}_{\text{reçue}} = \frac{d\mathcal{W}_L}{dt}$ .

**Propriété 7.4** (Associations).

$$(L_1) \text{ et } (L_2) \text{ associées en série} \implies L_{eq} = L_1 + L_2. \quad (\text{i})$$

$$(L_1) \text{ et } (L_2) \text{ associées en parallèle} \implies \frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}. \quad (\text{ii})$$

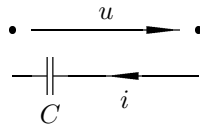
**Propriété 7.5** (Continuité). Le courant  $i$  traversant une inductance est continu.

### I.3 Condensateurs

**Définition 7.6** (Condensateur). *Un condensateur ( $C$ ) de charge  $q$  est un dipôle caractérisé par*

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = \frac{dq}{dt},$$

où  $C$  s'exprime en Farad (F). Un condensateur réel est constitué d'un condensateur idéal en parallèle avec une résistance.



**Définition 7.7** (Énergie emmagasinée). *Pour un condensateur ( $C$ ), on définit l'énergie emmagasinée  $\mathcal{W}_C$  par*

$$\mathcal{W}_C = \frac{1}{2} C u^2(t).$$

On a alors  $\mathcal{P}_{\text{reçue}} = \frac{d\mathcal{W}_C}{dt}$ .

**Propriété 7.8** (Associations).

$$(C_1) \text{ et } (C_2) \text{ associés en série} \implies \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (\text{i})$$

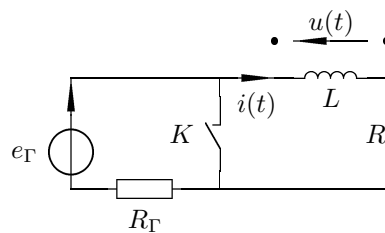
$$(C_1) \text{ et } (C_2) \text{ associés en parallèle} \implies C_{eq} = C_1 + C_2. \quad (\text{ii})$$

**Propriété 7.9** (Continuité). *La tension  $u$  aux bornes d'un condensateur est continue.*

## II Circuits du premier ordre

### II.1 Régime libre

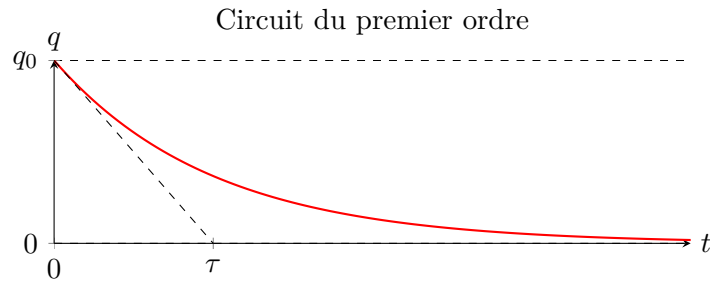
On s'intéresse au circuit  $RL$  suivant :



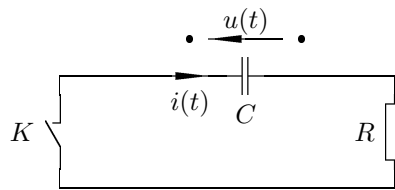
Pour  $t < 0$ , ( $K$ ) est ouvert. À l'instant  $t = 0$ , on ferme ( $K$ ). On a alors :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = 0.$$

La résolution de cette équation différentielle donne  $i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$  et  $u(t) = -R i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ , en notant  $\tau = \frac{L}{R}$ .



On s'intéresse maintenant au *circuit RC* suivant :



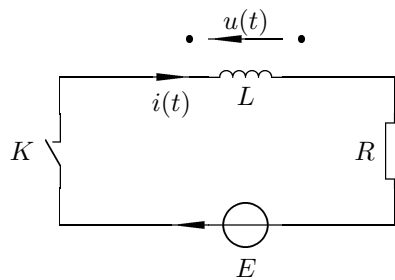
Pour  $t < 0$ , ( $K$ ) est ouvert. À l'instant  $t = 0$ , on ferme ( $K$ ). On a alors :

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q(t) = 0.}$$

La résolution de cette équation différentielle donne  $q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ ,  $i(t) = -\frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}}$  et  $u(t) = \frac{q_0}{C} e^{-\frac{t}{\tau}}$ , en notant  $\tau = RC$ .

## II.2 Circuit soumis à un échelon de tension

On s'intéresse au *circuit RL* suivant :



Pour  $t < 0$ , ( $K$ ) est ouvert. À l'instant  $t = 0$ , on ferme ( $K$ ). On obtient

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{et} \quad u(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}},$$

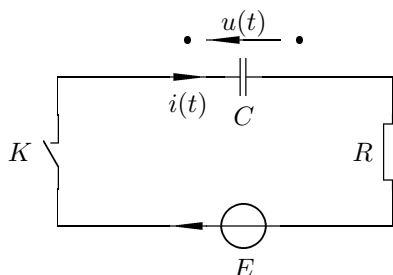
avec  $\tau = \frac{L}{R}$ . On peut alors calculer les énergies  $\mathcal{W}_\Gamma$  fournie par le générateur,  $\mathcal{W}_R$  perdue par effet Joule et  $\mathcal{W}_L$  emmagasinée dans la bobine :

$$\mathcal{W}_\Gamma = \int_0^{t_1} \underbrace{\mathcal{P}_\Gamma(t)}_{E \cdot i(t)} dt \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_R = \int_0^{t_1} \underbrace{\mathcal{P}_R(t)}_{R \cdot i^2(t)} dt \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_L = \frac{1}{2} L i^2(t).$$

On obtient

$$\boxed{\mathcal{W}_R + \mathcal{W}_L = \mathcal{W}_\Gamma.}$$

On s'intéresse au *circuit RC* suivant :



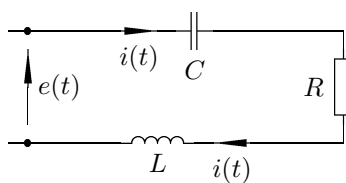
Pour  $t < 0$ , ( $K$ ) est ouvert. À l'instant  $t = 0$ , on ferme ( $K$ ). On obtient

$$q(t) = CE \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{et} \quad u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

avec  $\tau = RC$ . On a comme précédemment  $\mathcal{W}_R + \mathcal{W}_C = \mathcal{W}_E$ .

### III Circuits du second ordre

On s'intéresse au *circuit RLC série* suivant :



On a l'équation différentielle

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = \frac{e(t)}{L}.$$

**Définition 7.10.** Dans un circuit RLC série, on définit la pulsation propre  $\omega_0$ , le coefficient d'amortissement  $\sigma$  et le facteur de qualité  $Q$  par

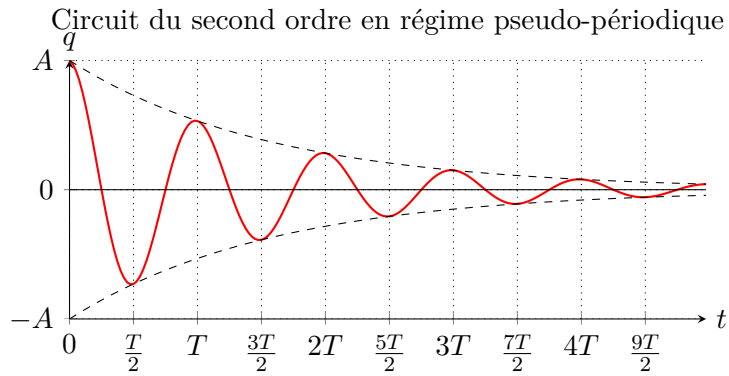
$$\underbrace{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}_{\text{pulsation propre}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\sigma = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}}_{\text{coefficient d'amortissement}} \quad \text{et} \quad \underbrace{Q = \frac{1}{2\sigma} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}_{\text{facteur de qualité}}.$$

Avec ces notations, on a

$$\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{e(t)}{L} \quad \text{ou} \quad \ddot{q} + 2\sigma\omega_0 \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{e(t)}{L}.$$

#### III.1 Régime libre

Dans le cas du régime libre, on a  $e(t) = 0$ , donc l'ED est homogène. Son équation caractéristique est  $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$ , de discriminant  $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) = 4\omega_0^2(\sigma^2 - 1)$ . On note  $r_1$  et  $r_2$  les racines de l'équation caractéristique, et  $\tau_1 = -\frac{1}{r_1}$ ,  $\tau_2 = -\frac{1}{r_2}$ . On a alors trois cas possibles :



Régime pseudo-périodique			Régime critique			Régime aperiodique		
$\sigma < 1$	$Q > \frac{1}{2}$	$\Delta < 0$	$\sigma = 1$	$Q = \frac{1}{2}$	$\Delta = 0$	$\sigma > 1$	$Q < \frac{1}{2}$	$\Delta > 0$
$q(t) = Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega t + \phi)$			$q(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$			$q(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$		

**Définition 7.11** (Pseudo-pulsation). Dans le cas du régime pseudo-périodique, on définit la pseudo-pulsation  $\omega$  par

$$\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2}.$$

On définit aussi la pseudo-période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

**Définition 7.12** (Décrément logarithmique). Dans le cas du régime pseudo-périodique, on définit le décrément logarithmique  $\delta$  par

$$\delta = \ln \left( \frac{q(t)}{q(t+T)} \right).$$

On peut alors s'intéresser au *portrait de phase* du circuit ; en électricité, celui-ci correspond à la représentation de  $\dot{q} = i$  en fonction de  $q$ .

L'étude énergétique du système en régime libre donne

$$\underbrace{[\mathcal{W}_L(0) + \mathcal{W}_C(0)]}_{\text{énergie totale initiale}} - \underbrace{[\mathcal{W}_L(t) + \mathcal{W}_C(t)]}_{\text{énergie totale finale}} = \underbrace{\int_0^t Ri^2(t) dt}_{\text{énergie dissipée par effet Joule}}.$$

Il y a donc perte d'énergie.

### III.2 Analogie mécanique-électricité

On peut faire une analogie entre un système mécanique comportant un ressort et un circuit électrique du second ordre :

Mécanique	$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$	$x$	$v = \dot{x}$	$m$	$\lambda$	$k$	$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{pe}$
Électricité	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$	$q$	$i = \dot{q}$	$L$	$R$	$\frac{1}{C}$	$\mathcal{W}_\Gamma = \mathcal{W}_L + \mathcal{W}_C$

# Réseaux Linéaires en Régime Sinusoïdal Forcé

## I Détermination du régime forcé

### I.1 Notation complexe

**Notation 8.1.** Soit  $y(t)$  une grandeur électrique. En régime sinusoïdal forcé,  $y(t)$  est de la forme  $y(t) = y_M \cos(\omega t + \varphi)$ . On associe alors à  $y(t)$  le complexe

$$\underline{y}(t) = y_M e^{j\varphi} e^{j\omega t}.$$

La grandeur  $y_M e^{j\varphi}$  est appelée amplitude complexe de  $y(t)$ , et on notera la plupart du temps  $\underline{y} = y_M e^{j\varphi}$ , en omettant la dépendance temporelle.

**Définition 8.2** (Valeur efficace). La valeur efficace d'une grandeur électrique  $y(t)$  est

$$y_{\text{eff}} = \sqrt{\langle y^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt},$$

où  $T$  est la période du signal. De plus, la valeur efficace complexe de  $y(t)$  est  $y_{\text{eff}} e^{j\varphi}$ .

**Remarque 8.3.** Pour un régime sinusoïdal forcé,  $y_{\text{eff}} = y_M \sqrt{\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle}$ , donc  $y_{\text{eff}} = \frac{y_M}{\sqrt{2}}$ .

### I.2 Dérivation et intégration par rapport au temps

Avec ces notations, la dérivation par rapport au temps se traduit par une simple multiplication par  $(j\omega)$ . De même, l'intégration par rapport au temps se traduit par une division par  $(j\omega)$ .

### I.3 Relations courant-tension

**Définition 8.4** (Impédance). On définit l'impédance  $\underline{Z}$  d'un dipôle en convention récepteur, traversé par un courant d'intensité  $\underline{i}$ , et dont les bornes sont à une tension  $\underline{u}$ , par :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}.$$

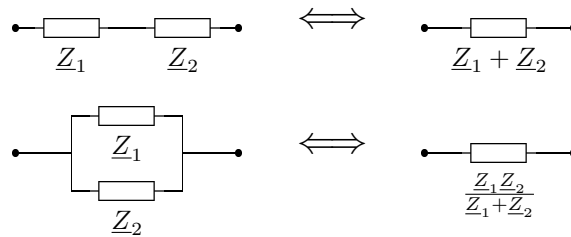
**Définition 8.5** (Admittance). On définit l'admittance  $\underline{Y}$  par  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ .

**Exemple 8.6** (Résistance). Pour une résistance ( $R$ ), on a  $\underline{Z}_R = R$ .

**Exemple 8.7** (Inductance). Pour une inductance ( $L$ ), on a  $\underline{Z}_L = jL\omega$ .

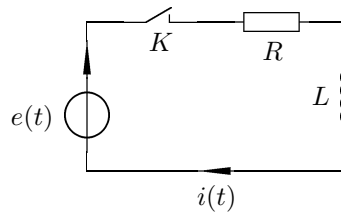
**Exemple 8.8** (Condensateur). Pour un condensateur ( $C$ ), on a  $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ .

**Propriété 8.9** (Associations).



#### I.4 Exemple de circuit RL et vecteurs de Fresnel

On s'intéresse au circuit suivant :



Avec  $e(t) = E \cos(\omega t)$ . On cherche  $i(t)$  sous la forme  $i(t) = I \cos(\omega t - \varphi)$ . On a  $\underline{Z}_R = R$ ,  $\underline{Z}_L = jL\omega$ , donc

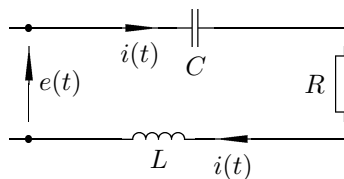
$$\underline{Z} = \frac{e}{i} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = R + jL\omega.$$

Or  $\underline{Z} = \frac{E}{I} \cdot e^{j\varphi}$ . Ainsi  $I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$  et  $\varphi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$ .

**Remarque 8.10.** On peut aussi retrouver ce résultat avec des vecteurs de Fresnel : il suffit pour cela de représenter les vecteurs d'affixes respectives  $\underline{Z}_R$  et  $\underline{Z}_L$ , puis de construire le vecteur somme  $\underline{Z}$ .

## II Étude du circuit RLC série

On étudie le circuit suivant :



Avec  $e(t) = E \cos(\omega t)$ . On cherche  $i(t) = I \cos(\omega t - \varphi_{e/i})$ .

## II.1 Impédance du circuit

L'impédance du circuit est

$$\underline{Z} = \frac{e}{i} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right).$$

On remarque que  $\Im(\underline{Z}) \geq 0$  ssi  $\omega \geq \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

### Vocabulaire 8.11.

- (i) Si  $\omega > \omega_0$ , alors  $0 < \arg \underline{Z} < \frac{\pi}{2}$ , et le circuit est dit inductif.
- (ii) Si  $\omega < \omega_0$ , alors  $-\frac{\pi}{2} < \arg \underline{Z} < 0$ , et le circuit est dit capacitif.

## II.2 Résonance en courant du circuit

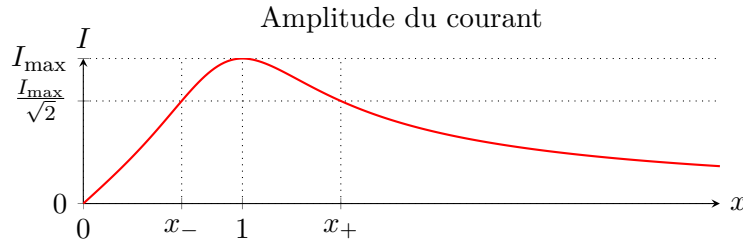
Ainsi, on a  $i = \frac{e}{\underline{Z}} = \frac{E}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$ . Donc  $I = |i| = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$ . On introduit les notations suivantes :

$$\underbrace{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}_{\text{pulsation propre}} \quad \text{et} \quad \underbrace{Q = \frac{1}{2\sigma} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}_{\text{facteur de qualité}} \quad \text{et} \quad \underbrace{x = \frac{\omega}{\omega_0}}_{\text{pulsation réduite}}.$$

On a alors :

$$I = \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}.$$

On note  $I_{\max} = \frac{E}{R}$ .



**Définition 8.12** (Bande passante). On appelle bande passante en pulsation l'intervalle

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-,$$

où  $\omega_+$  et  $\omega_-$  sont tels que  $I(\omega_+) = I(\omega_-) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$ . On note de même  $x_+ = \frac{\omega_+}{\omega_0}$ ,  $x_- = \frac{\omega_-}{\omega_0}$ .

Ici, pour déterminer la bande passante, on résout l'équation suivante :

$$\begin{aligned} I(x) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} &\iff \frac{1}{Q^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \\ &\iff x = \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{1}{2Q} \\ &\iff x = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{1}{2Q} \end{aligned}$$

car les autres solutions sont négatives.

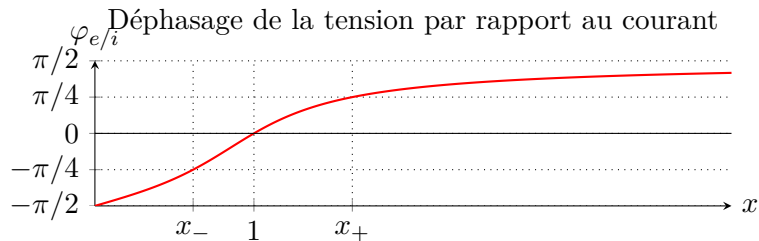


Il vient immédiatement

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}.$$

On s'intéresse maintenant au déphasage  $\varphi_{e/i}$  de  $e(t)$  par rapport à  $i(t)$ . On a

$$\varphi_{e/i} = \arg \underline{Z} = \arctan \left( \frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} \right) = \arctan \left[ Q \left( x - \frac{1}{x} \right) \right].$$



**Remarque 8.13.** On a  $\varphi(\omega_+) = \frac{\pi}{4}$ ,  $\varphi(\omega_-) = -\frac{\pi}{4}$ .

### II.3 Résonance en tension aux bornes du condensateur

En appliquant la formule du diviseur de tension (en remplaçant les résistances par des impédances), on obtient la tension  $\underline{u}_C$  aux bornes du condensateur :

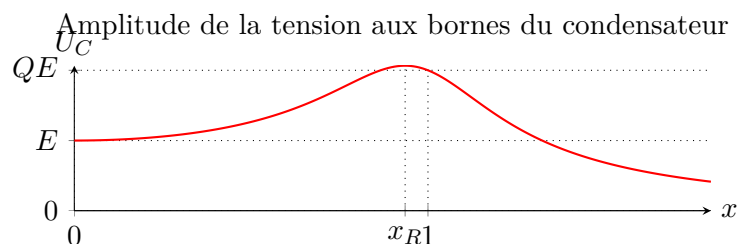
$$\underline{u}_C = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} \underline{e} = \frac{-\frac{j}{C\omega}}{R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)} \underline{e} = \frac{\underline{e}}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}.$$

On peut alors en déduire l'amplitude  $U_C$  de la tension et son déphasage  $\varphi_{u_C/e}$  par rapport à  $e(t)$  :

$$U_C = |\underline{u}_C| = \frac{E}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}},$$

$$\varphi_{u_C/e} = \arg \left( \frac{\underline{u}_C}{\underline{e}} \right) = -\arg \left( (1 - x^2) + j \frac{x}{Q} \right) = -\arccos \left( \frac{1 - x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \right).$$

On observe un phénomène de *résonance* en tension s'il existe une valeur de  $x > 0$  pour laquelle  $U_C$  est maximal. Ici, cela se produit lorsque  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $x_R = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ .



## II.4 Résonance en puissance

**Propriété 8.14.** En courant alternatif, si on pose  $u(t) = U \cos(\omega t)$ ,  $i(t) = I \cos(\omega t - \varphi)$ , alors la puissance  $p$  est donnée par

$$p(t) = UI \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) = \frac{UI}{2} (\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi).$$

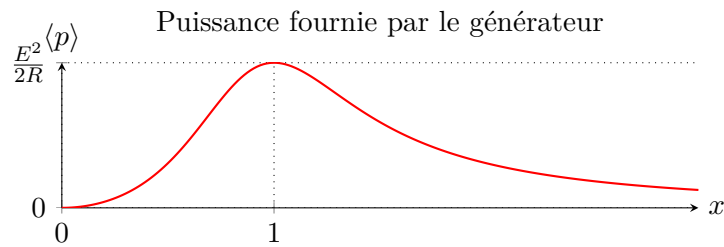
Donc la puissance moyenne est :

$$\langle p(t) \rangle = \frac{UI}{2} \cos \varphi = \underbrace{\frac{U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}}}{2}}_{\text{puissance apparente}} \times \underbrace{\cos \varphi}_{\text{facteur de puissance}}.$$

Dans le circuit RLC série étudié, on a  $\cos \varphi_{e/i} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2}}$  et  $I = \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2}}$ .

Donc

$$\langle p(t) \rangle = \frac{E^2}{2R} \cdot \frac{1}{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}.$$



# Réponse Fréquentielle de Systèmes Linéaires

## I Signaux périodiques

**Définition 9.1** (Série de Fourier). *Tout signal physique périodique  $s(t)$ , de période  $T$  avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , peut s'écrire comme somme de fonctions sinusoïdales ; on appelle cette somme une série de Fourier :*

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)). \end{aligned}$$

Les pulsations de chaque harmonique sont multiples de celle du fondamental. Le spectre de Fourier du signal est la représentation des amplitudes  $\alpha_k$  et des déphasages  $\varphi_k$  en fonction des fréquences  $2\pi k\omega$  (ou des pulsations  $k\omega$ ).

**Propriété 9.2.** *Les coefficients de la série de Fourier sont donnés par*

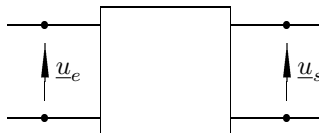
$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt \quad \text{et} \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt.$$

**Théorème 9.3** (Théorème de Parseval). *Le théorème de Parseval exprime la façon dont l'énergie correspondant au phénomène périodique décrit par  $f(t)$  se répartit entre les différents harmoniques :*

$$\underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}_{\langle f^2(t) \rangle = f_{\text{eff}}^2} = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

## II Fonction de transfert

On considère un quadripôle de tension d'entrée  $\underline{u}_e$  et de tension de sortie  $\underline{u}_s$ .



**Définition 9.4** (Fonction de transfert). On définit la fonction de transfert  $\underline{H}$  du système par

$$\underline{H} = \frac{u_s}{u_e}.$$

**Définition 9.5** (Gain et déphasage). Le gain en décibels  $G_{\text{dB}}$  du système est défini par

$$G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}|.$$

Son déphasage  $\varphi$  est défini par

$$\varphi = \arg \underline{H}.$$

**Définition 9.6** (Diagramme de Bode). Un diagramme de Bode est la représentation de  $G_{\text{dB}}$  et de  $\varphi$  en fonction de  $\log \omega$ .

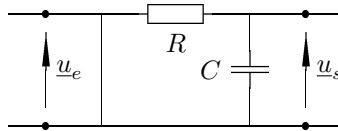
**Définition 9.7** (Fréquence de coupure). La fréquence de coupure (resp. pulsation de coupure) d'un filtre est la fréquence (resp. pulsation) pour laquelle on a

$$|\underline{H}| = \frac{|\underline{H}|_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad G_{\text{dB}} \approx G_{\text{dBmax}} - 3 \text{ dB}.$$

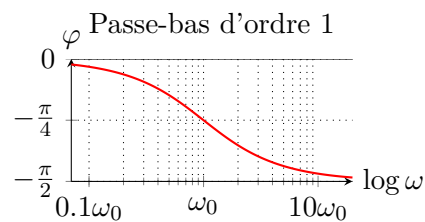
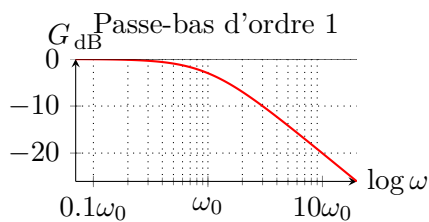
### III Modèles simples de filtres passifs

#### III.1 Filtres d'ordre 1

On considère le quadripôle suivant, qui est un *filtre de passe-bas d'ordre 1* :

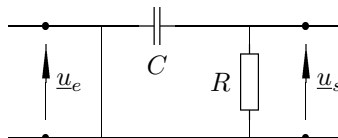


On a  $\underline{H} = \frac{1}{1+jx}$ , avec  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ . Donc  $G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  et  $\varphi = -\arctan x$ .

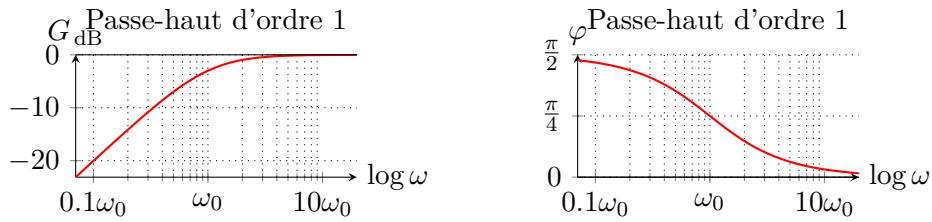


Un passe-bas permet donc de filtrer les fréquences pour ne laisser passer que les basses fréquences.

Le quadripôle suivant est quant à lui un *filtre de passe-haut d'ordre 1* :



On a alors  $\underline{H} = \frac{jx}{1+jx}$ . Donc  $G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  et  $\varphi = \arctan \frac{1}{x}$ .



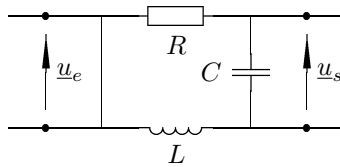
Un passe-haut ne laisse donc passer que les hautes fréquences.

Enfin, pour un *filtre quelconque d'ordre 1*, on a

$$\underline{H} = A \cdot \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$$

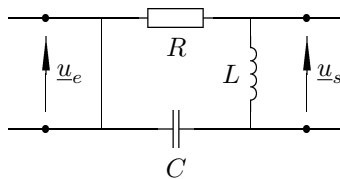
### III.2 Filtres d'ordre 2

*Passe-bas d'ordre 2* :



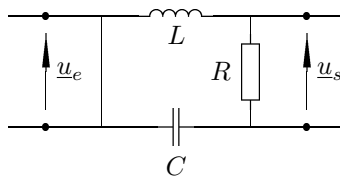
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega + LC(j\omega)^2}$$

*Passe-haut d'ordre 2* :

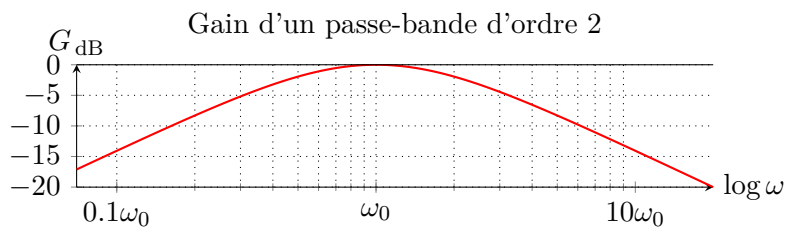


$$\underline{H} = \frac{LC(j\omega)^2}{1 + jRC\omega + LC(j\omega)^2}$$

*Passe-bande d'ordre 2* :

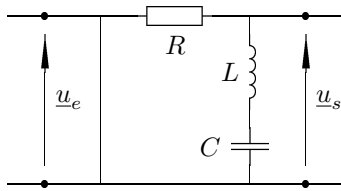


$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega + LC(j\omega)^2}$$

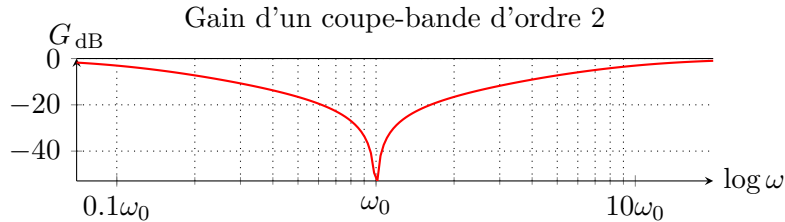


Un passe-bande ne laisse donc passer que les pulsations proches de  $\omega_0$ .

Coupe-bande d'ordre 2 :



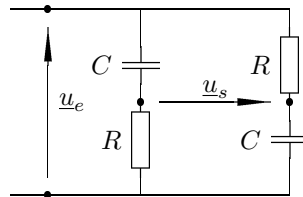
$$\underline{H} = \frac{1 + LC(j\omega)^2}{1 + jRC\omega + LC(j\omega)^2}$$



Un coupe-bande permet donc de ne laisser passer que les pulsations extrêmes, c'est-à-dire les pulsations éloignées de  $\omega_0$ .

### III.3 Filtres déphaseurs

Le système suivant est un *filtre déphaseur* :



On a ici  $\underline{H} = \frac{1-jx}{1+jx}$ , avec  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ . Ainsi  $G_{dB} = 0$  et  $\varphi = -2 \arctan x$ . Un filtre déphaseur permet donc de garder l'amplitude du signal inchangée (ou, en général, multipliée par une constante) mais de déphaser le signal en fonction de sa pulsation.

## IV Applications

### IV.1 Fonctions de transfert et équations différentielles

Dans un réseau linéaire, la fonction de transfert est une fraction rationnelle en  $j\omega$  :

$$\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{\sum_{k=0}^p \beta_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^q \alpha_k (j\omega)^k}$$

Puisqu'une multiplication par  $(j\omega)$  correspond à une dérivation par rapport au temps, on peut facilement en déduire l'équation différentielle vérifiée par le système :

$$\sum_{k=0}^q \alpha_k \frac{d^k u_s}{dt^k} = \sum_{k=0}^p \beta_k \frac{d^k u_e}{dt^k}$$

Ceci peut permettre par exemple de déterminer l'équation différentielle d'un système en régime transitoire sans utiliser les lois de Kirchhoff.

## IV.2 Réponse à un échelon de tension

**Définition 9.8** (Échelon de tension). *Un échelon de tension  $u_e$  d'amplitude  $E$  est défini par  $u_e(t) = E \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ .*

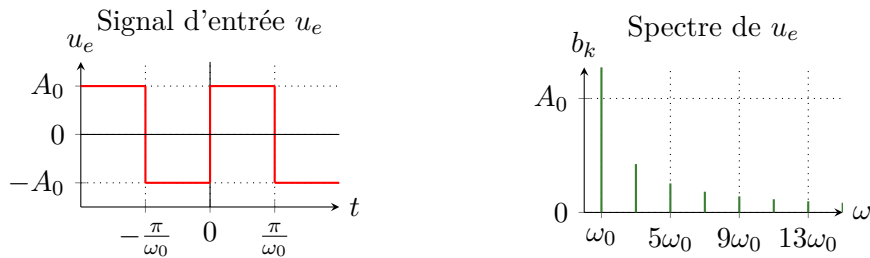
**Propriété 9.9.** *On s'intéresse à un système linéaire soumis à un échelon de tension  $u_e$ , et dont on connaît la fonction de transfert  $\underline{H}$ . On a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_s(t) = E \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \underline{H} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} u_s(t) = E \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \underline{H}.$$

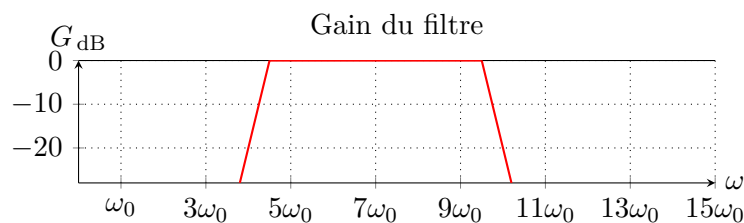
## IV.3 Cas d'un signal d'entrée périodique mais non sinusoïdal

La décomposition en *série de Fourier* (c.f. définition 9.1) est particulièrement intéressante pour les *réseaux électriques linéaires*, car les primitives et les dérivées des fonctions sinusoïdales sont sinusoïdales. Ainsi, il suffit de connaître le comportement d'un système vis-à-vis des tensions sinusoïdales pour en déduire son comportement vis-à-vis d'une tension périodique quelconque. Pour cela, on étudie comment le système transforme chaque composante de la tension d'entrée, puis on somme toutes les composantes transformées, ce qui fournit la tension de sortie.

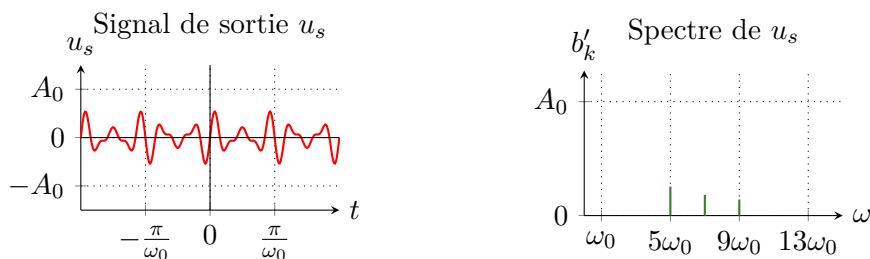
Considérons par exemple un signal d'entrée carré, que l'on a représenté avec son spectre :



On considère un filtre passe-bande ayant une fonction de transfert réelle positive (donc sans déphasage) :



On a donc facilement le spectre du signal de sortie  $u_s$ , et on peut en déduire la forme du signal :



#### IV.4 Caractère pseudo-dérivateur et pseudo-intégrateur des filtres d'ordre 1

Si on considère un *filtre passe-haut d'ordre 1*, on a  $\underline{H} = \frac{H_\infty j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$ . Pour  $\omega \ll \omega_0$ , on a ainsi  $\underline{u}_s \approx \frac{H_\infty}{\omega_0} (j\omega) \underline{u}_e$ . Puisqu'une multiplication par  $(j\omega)$  correspond à une dérivation par rapport au temps, il vient :

$$u_s(t) \approx \frac{H_\infty}{\omega_0} \cdot \frac{du_e}{dt}.$$

Et ceci est valable pour n'importe quel signal périodique, en utilisant la série de Fourier et la linéarité de la dérivation.

**Exemple 9.10.** *En filtrant une tension en triangles de pulsation  $\omega \ll \omega_0$  par un filtre passe-haut, on obtiendra une tension en créneaux, car on aura "dérivé" les triangles.*

De même, avec un *filtre passe-bas d'ordre 1*, on a  $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$  ; donc pour  $\omega \gg \omega_0$ ,  $\underline{u}_s \approx H_0 \omega_0 \frac{\underline{u}_e}{j\omega}$ . D'où

$$u_s(t) \approx H_0 \omega_0 \int u_e(t) dt.$$



# Chapitre 10

## Cinématique

La *cinématique* est la partie de la mécanique qui décrit la géométrie des mouvements indépendamment des causes qui les produisent.

### I Mouvement d'un point

#### I.1 Notion de point matériel

**Définition 10.1** (Point matériel). *Un point matériel est un objet assez petit pour que, dans l'étude envisagée, sa position puisse être définie comme celle d'un point géométrique.*

#### I.2 Repérage

On doit avoir :

- (i) Un *repérage dans le temps* : choix d'une origine.
- (ii) Un *repérage dans l'espace* : choix d'un référentiel d'étude, puis d'un repère dans le référentiel.

**Remarque 10.2.** *En mécanique classique, on admet que, pour deux observateurs liés à deux référentiels différents, la durée entre deux événements est la même.*

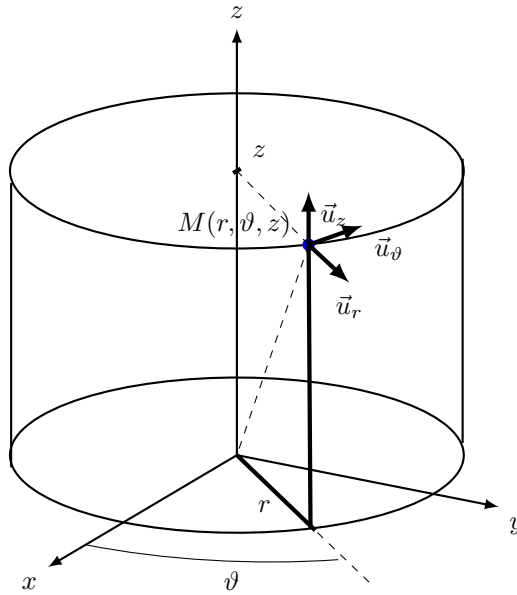
On utilise principalement trois systèmes de coordonnées :

- (i) Dans un *repère cartésien* défini par une base orthonormée directe  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , un point  $M$  peut être repéré par  $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ .
- (ii) Dans un *repère cylindrique* défini par une base orthonormée directe  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\vartheta, \vec{u}_z)$ , un point  $M$  peut être repéré par  $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ .
- (iii) Dans un *repère sphérique* défini par une base orthonormée directe  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\vartheta, \vec{u}_\varphi)$ , un point  $M$  peut être repéré par  $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ .

#### I.3 Vecteur vitesse

**Définition 10.3** (Vecteur vitesse). *Le vecteur vitesse d'un point  $M$  dans un repère d'origine  $O$  est :*

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}.$$



Repère cylindrique

**Propriété 10.4** (Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes). *En coordonnées cartésiennes, pour un point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$ , on a*

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z.$$

**Propriété 10.5** (Vecteur vitesse en coordonnées cylindriques). *En coordonnées cylindriques, pour un point  $M$  de coordonnées  $(r, \vartheta, z)$ , on a*

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\vartheta}\vec{u}_\vartheta + \dot{z}\vec{u}_z.$$

Cette propriété vient du fait que :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos \vartheta \vec{u}_x + \sin \vartheta \vec{u}_y) = \dot{\vartheta}(-\sin \vartheta \vec{u}_x + \cos \vartheta \vec{u}_y) = \dot{\vartheta}\vec{u}_\vartheta.$$

Alternativement, on peut écrire :

$$d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\vartheta\vec{u}_\vartheta + dz\vec{u}_z.$$

**Propriété 10.6** (Vecteur vitesse en coordonnées sphériques). *En coordonnées sphériques, pour un point  $M$  de coordonnées  $(r, \vartheta, \varphi)$ , on a*

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\vartheta}\vec{u}_\vartheta + r\dot{\varphi}\sin \vartheta\vec{u}_\varphi.$$

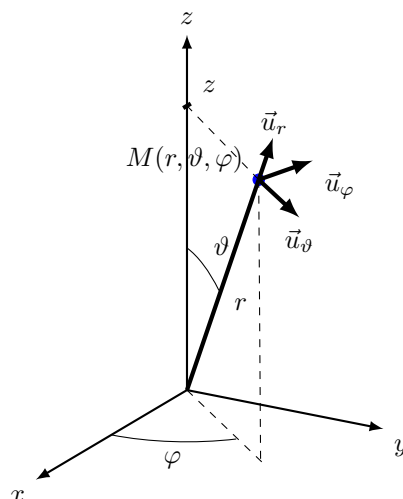
En effet :

$$d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\vartheta\vec{u}_\vartheta + r d\varphi \sin \vartheta\vec{u}_\varphi.$$

#### I.4 Vecteur accélération

**Définition 10.7** (Vecteur accélération). *Le vecteur accélération d'un point  $M$  dans un repère d'origine  $O$  est :*

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}.$$



Repère sphérique

**Propriété 10.8** (Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes). *En coordonnées cartésiennes, pour un point M de coordonnées  $(x, y, z)$ , on a*

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z.$$

**Propriété 10.9** (Vecteur accélération en coordonnées cylindriques). *En coordonnées cylindriques, pour un point M de coordonnées  $(r, \vartheta, z)$ , on a*

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta})\vec{u}_\vartheta + \ddot{z}\vec{u}_z.$$

Cela vient du fait que :

$$\frac{d\vec{u}_\vartheta}{dt} = \frac{d}{dt}(-\sin \vartheta \vec{u}_x + \cos \vartheta \vec{u}_y) = -\dot{\vartheta} \vec{u}_r.$$

## I.5 Quelques mouvements

**Définition 10.10** (Mouvements accélérés, retardés, uniformes). *Pour un mouvement quelconque, on s'intéresse au signe de  $\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = \frac{d\vec{v}^2}{dt} = 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{v}$  :*

- (i) Si  $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$ , le mouvement est dit accéléré.
- (ii) Si  $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$ , le mouvement est dit uniforme.
- (iii) Si  $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$ , le mouvement est dit retardé.

Un mouvement rectiligne suit une droite. On peut alors se placer dans un repère cartésien tel que, à tout instant,  $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x$ .

**Définition 10.11** (Cas particuliers de mouvements uniformes).

- (i) Le mouvement est dit rectiligne uniforme lorsque  $\dot{x} = \text{constante}$ .
- (ii) Le mouvement est dit rectiligne uniformément accéléré lorsque  $\ddot{x} = \text{constante}$ . Dans ce cas, on a, pour tout instant  $t$  :

$$\ddot{x}(x(t) - x(0)) = \frac{1}{2}(v^2(t) - v^2(0)).$$

Un *mouvement circulaire* suit un cercle. On peut alors se placer dans un repère cylindrique tel que, à tout instant,  $r = \text{constante}$  et  $z = \text{constante}$ .

**Propriété 10.12.** *Pour un mouvement circulaire, on a alors :*

$$\vec{v} = r\dot{\vartheta}\vec{u}_\vartheta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\dot{\vartheta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\vartheta}\vec{u}_\vartheta.$$

**Remarque 10.13.** *On considère le mouvement d'un point  $M$  dans le plan. On peut définir une base de Frenet  $(\vec{N}, \vec{T})$  en utilisant le cercle tangent à la trajectoire à un instant donné.  $\vec{N}$  est alors le vecteur unitaire normal au cercle en  $M$ , et  $\vec{T}$  est le vecteur unitaire tangent au cercle en  $M$ . En notant  $\rho$  le rayon de courbure de la trajectoire, i.e. le rayon du cercle, on a*

$$\vec{v} = v\vec{T} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{v^2}{\rho}\vec{N} + \frac{dv}{dt}\vec{T}.$$

**Définition 10.14** (Vitesse de rotation). *On note  $\omega = \dot{\vartheta}$ , et  $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$ .*

**Propriété 10.15.** *Pour un mouvement circulaire, on a :*

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}, \tag{i}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} - \omega^2\overrightarrow{OM}. \tag{ii}$$

## II Mouvement d'un solide

### II.1 Définition

**Définition 10.16** (Solide). *Un solide (indéformable) est un objet dont les différents points restent à des distances constantes les uns des autres au cours du mouvement.*

Un solide est défini par neuf paramètres : les coordonnées de trois points du solide. Mais ces coordonnées sont liées par trois relations correspondant aux distances fixes entre les points. Ainsi, un solide est paramétré par *six paramètres indépendants*.

### II.2 Cas d'un mouvement de translation

**Définition 10.17** (Mouvement de translation). *Un solide est en translation si, à chaque instant, tous les points du solide ont le même vecteur vitesse.*

### II.3 Cas d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe

On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe. Alors un point  $M$  du solide a un mouvement circulaire de centre  $O$  ( $O$  étant la projection de  $M$  sur l'axe de rotation) et de rayon  $r = OM$ . Le vecteur vitesse du point  $M$  est donc donné par

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}.}$$

### II.4 Généralisation

Soit  $A, B$  deux points d'un même solide. On a  $\|\overrightarrow{AB}\| = \text{constante}$ , donc  $\frac{d\overrightarrow{AB}^2}{dt} = 0$ , d'où  $(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .

On peut montrer que le mouvement général à un instant donné d'un solide est la superposition d'une translation et d'une rotation de même axe.

# Dynamique du Point en Référentiel Galiléen

## I Principes fondamentaux et conséquences

### I.1 Première loi de Newton : principe d'inertie

**Loi 11.1** (Première loi de Newton). *Il existe des référentiels privilégiés dans lesquels le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne uniforme. On appelle ces référentiels des référentiels galiléens ou référentiels d'inertie.*

**Remarque 11.2.** *En pratique, on s'intéresse généralement à des systèmes pseudo-isolés dans lesquels les forces appliquées se compensent.*

### I.2 Deuxième loi de Newton : relation fondamentale de la dynamique

**Définition 11.3** (Quantité de mouvement). *Dans un référentiel  $(R)$ , la quantité de mouvement  $\vec{p}$  d'un point matériel de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$  est :*

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

**Loi 11.4** (Deuxième loi de Newton). *Dans un référentiel galiléen  $(R)$ , un point de masse  $m$  et de quantité de mouvement  $\vec{p}$  vérifie :*

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

où  $\sum \vec{F}$  désigne la somme des forces exercées sur la particule par chacun des corps en interaction avec elle.

**Conséquence 11.5.** *Lorsque la masse  $m$  est constante, on a*

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}.$$

### I.3 Troisième loi de Newton : principe de l'action et de la réaction

**Loi 11.6.** *Soient deux points  $A$  et  $B$ . On note  $\vec{F}_{A \rightarrow B}$  la force qu'exerce  $A$  sur  $B$  et  $\vec{F}_{B \rightarrow A}$  celle de  $B$  sur  $A$ . Alors*

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} + \vec{F}_{B \rightarrow A} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{A \rightarrow B} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}.$$

## II Exemples de forces

### II.1 Forces à distance

**Loi 11.7** (Interaction gravitationnelle).

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{u}_{AB},$$

avec  $m_A$  et  $m_B$  les masses respectives de  $A$  et  $B$ ,  $r = \|\vec{AB}\|$ ,  $\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{r}$ , et  $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ .

**Loi 11.8** (Interaction électrostatique).

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{u}_{AB},$$

avec  $q_A$  et  $q_B$  les charges respectives de  $A$  et  $B$ ,  $r = \|\vec{AB}\|$ ,  $\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{r}$ , et  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot \text{F}^{-1}$ .

**Loi 11.9** (Interaction électromagnétique). Plus généralement, la force agissant sur une particule de charge  $q$  et de vitesse  $\vec{v}$  est donnée par

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right),$$

où  $\vec{E}$  est le champ électrique et  $\vec{B}$  le champ magnétique.

### II.2 Forces de contact

**Loi 11.10** (Glissement sans frottement). Si un solide  $S$  est en contact avec un support  $S'$ , la réaction  $\vec{R}$  qu'exerce  $S'$  sur  $S$  est perpendiculaire au support et dirigée vers l'extérieur du support. Le contact cesse lorsque  $\vec{R} = \vec{0}$ .

**Loi 11.11** (Frottement solide). Avec frottements, la réaction  $\vec{R}$  qu'exerce  $S'$  sur  $S$  peut se décomposer en deux termes : l'un  $\vec{N}$  normal à la surface et l'autre  $\vec{T}$  tangent à celle-ci.

**Loi 11.12** (Frottement fluide). Un solide en translation à la vitesse  $\vec{v}$  dans un milieu fluide entraîne partiellement ce dernier dans son mouvement de manière complexe. On note  $\vec{f}$  la résultante des forces exercées par le fluide sur le solide.

- (i) Dans le cas d'un mouvement lent, on peut faire la simplification  $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ , et on parle de frottement visqueux.
- (ii) Dans le cas d'un mouvement rapide, on peut faire la simplification  $\vec{f} = -\alpha v\vec{v}$ .

### II.3 Forces de tension

**Loi 11.13** (Fil inextensible souple sans masse). Considérons un fil inextensible, souple et de masse négligeable. La force de tension  $\vec{T}$  qu'exerce une partie du fil sur l'autre au niveau du point qui les sépare est tangente au fil. Le fil n'est plus tendu lorsque  $\vec{T} = \vec{0}$ .

**Loi 11.14** (Ressort). La tension  $\vec{T}$  d'un ressort est donnée par :

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x.$$

### III Aspect énergétique

#### III.1 Puissance d'une force

**Définition 11.15** (Puissance). La puissance  $\mathcal{P}$  d'une force  $\vec{F}$  qui s'applique à un point  $M$  évoluant à une vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel  $R$  est

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

**Vocabulaire 11.16.** Si  $\mathcal{P} > 0$ ,  $\vec{F}$  est dite motrice, sinon  $\vec{F}$  est dite résistante.

#### III.2 Travail d'une force

**Définition 11.17** (Travail). Le travail élémentaire  $\delta\mathcal{W}$  entre  $t$  et  $t + dt$  d'une force  $\vec{F}$  s'exerçant sur un point  $M$  est

$$\delta\mathcal{W} = \mathcal{P} dt = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

où  $d\vec{r}$  représente le parcours de  $M$  pendant la durée  $dt$ . Entre deux instants  $(t_1, t_2)$  ou deux positions  $(M_1, M_2)$  quelconques, le travail est obtenu en sommant les travaux élémentaires :

$$\mathcal{W}_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

**Propriété 11.18.** Si plusieurs forces sont appliquées au même point, le travail total est la somme des travaux des différentes forces.

**Vocabulaire 11.19.** Si  $\mathcal{W}_{1 \rightarrow 2} > 0$ ,  $\vec{F}$  est dite motrice, sinon  $\vec{F}$  est dite résistante.

#### III.3 Théorème de la puissance cinétique

**Définition 11.20** (Énergie cinétique). L'énergie cinétique est donnée par  $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$ .

**Théorème 11.21** (Théorème de la puissance cinétique).

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P} \left( \sum \vec{F} \right),$$

où  $\mathcal{P} \left( \sum \vec{F} \right)$  est la puissance de toutes les forces appliquées.

#### III.4 Théorème de l'énergie cinétique

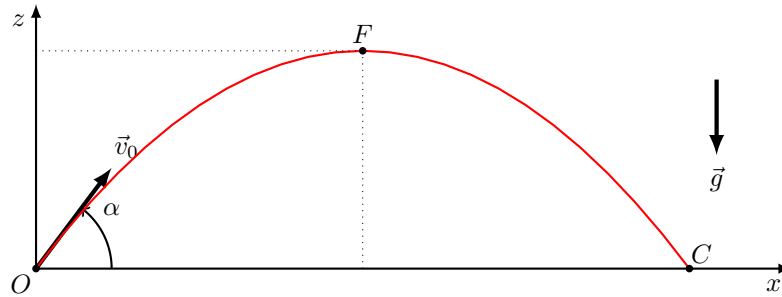
**Théorème 11.22** (Théorème de l'énergie cinétique).

$$\mathcal{E}_{c2} - \mathcal{E}_{c1} = \mathcal{W}_{1 \rightarrow 2} \left( \sum \vec{F} \right),$$

où  $\mathcal{W}_{1 \rightarrow 2} \left( \sum \vec{F} \right)$  est le travail de toutes les forces appliquées.

### IV Application au mouvement dans le champ de pesanteur uniforme

Un projectile  $M$  de masse  $m$  est lancé dans le champ de pesanteur uniforme avec une vitesse  $\vec{v}_0$  faisant avec le plan horizontal un angle  $\alpha$ . On note  $O$  le point de lancement,  $(Oz)$  l'axe vertical ascendant, et  $(Oxz)$  le plan contenant  $\vec{v}_0$  tel que  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .



Trajectoire d'un tir dans le vide

#### IV.1 Tir dans le vide

Dans ce paragraphe, on néglige les frottements. Le *principe fondamental de la dynamique* (PFD) donne alors  $m\vec{a} = m\vec{g}$ , soit

$$\boxed{\vec{a} = \vec{g}.}$$

Par intégration, on obtient  $\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0$ , puis

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0t.$$

En éliminant le temps, on obtient l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha.$$

**Vocabulaire 11.23** (Flèche). *La flèche  $F$  correspond à l'altitude maximale atteinte par le projectile : c'est la sommet de la trajectoire.*

Pour trouver la flèche, on résout  $\frac{dz}{dx} = 0$ ; on obtient ici  $z_F = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}$ .

**Vocabulaire 11.24** (Portée). *La portée est la distance du point de chute  $C$  au point de lancement  $O$ .*

Pour trouver la portée, on résout  $z = 0$ ; on obtient ici  $x_C = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$ .

**Vocabulaire 11.25** (Parabole de sûreté). *Pour une vitesse  $v_0$  donnée, la parabole de sûreté est la courbe délimitant l'ensemble des points que peut atteindre le projectile.*

Pour trouver l'équation de la parabole de sûreté, on cherche pour quelles valeurs de  $x$  et  $z$  l'équation  $z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$  a des solutions pour  $\alpha$ . En posant  $u = \tan \alpha$ , cette équation équivaut à  $\frac{gx^2}{2v_0^2} u^2 - xu + \left(\frac{gx^2}{2v_0^2} + z\right) = 0$ . Le discriminant est  $\Delta = x^2 - 4\frac{gx^2}{2v_0^2} \left(\frac{gx^2}{2v_0^2} + z\right)$ . On obtient ainsi l'équation de la parabole de sûreté :

$$z = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}.$$

#### IV.2 Tir avec frottement fluide

On considère maintenant qu'il y a en plus un *frottement fluide* donné par  $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ . Le PFD donne alors  $m\vec{a} = m\vec{g} - \lambda\vec{v}$ , soit

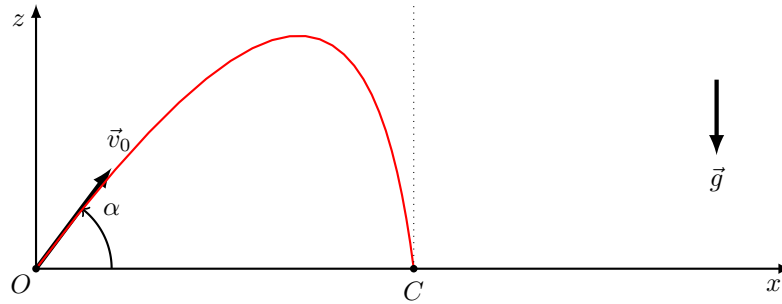
$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\lambda}{m}\vec{v} = \vec{g}.}$$



La résolution de cette ED donne

$$\vec{v} = \frac{m}{\lambda} \vec{g} + \vec{A} e^{-\frac{\lambda}{m} t},$$

où  $\vec{A}$  est à déterminer par les CI. On a ici  $\vec{A} = \vec{v}_0 - \frac{m}{\lambda} \vec{g}$ , et on obtient par intégration :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{m}{\lambda} \vec{g} t - \frac{m}{\lambda} (\vec{v}_0 - \frac{m}{\lambda} \vec{g}) (e^{-\frac{\lambda}{m} t} - 1).$$


Trajectoire d'un tir avec frottement fluide

# Chapitre 12

## Approche Énergétique du Mouvement d'un Point

### I Gradient d'une fonction

**Définition 12.1** (Gradient). Le gradient, noté  $\vec{\nabla}$ , est un opérateur, défini en coordonnées cartésiennes par

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

**Propriété 12.2.** Si  $U(x, y, z)$  est une fonction, alors on a :

$$dU = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r},$$

où  $d\vec{r} = (dx)\vec{u}_x + (dy)\vec{u}_y + (dz)\vec{u}_z$ .

**Propriété 12.3.** Le gradient  $\vec{\nabla}_C$  en coordonnées cylindriques et le gradient  $\vec{\nabla}_S$  en coordonnées sphériques sont donnés par :

$$\vec{\nabla}_C = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla}_S = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}.$$

### II Cas des forces conservatives

#### II.1 Énergie potentielle

**Définition 12.4** (Travail). Le travail élémentaire  $\delta\mathcal{W}$  entre  $t$  et  $t + dt$  d'une force  $\vec{F}$  s'exerçant sur un point  $M$  est

$$\delta\mathcal{W} = \mathcal{P} dt = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

où  $d\vec{r}$  représente le parcours de  $M$  pendant la durée  $dt$ . Entre deux instants  $(t_1, t_2)$  ou deux positions  $(M_1, M_2)$  quelconques, le travail est obtenu en sommant les travaux élémentaires :

$$\mathcal{W}_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

## CHAPITRE 12. APPROCHE ÉNERGÉTIQUE DU MOUVEMENT D'UN POINT

**Définition 12.5** (Énergie potentielle). *Lorsque le travail est indépendant du chemin parcouru, le travail élémentaire  $\delta\mathcal{W}$  peut s'écrire sous la forme d'une différentielle. On définit alors l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$  par*

$$\delta\mathcal{W} = -d\mathcal{E}_p \quad \text{ou} \quad \mathcal{W} = -\Delta\mathcal{E}_p.$$

*On dit dans ce cas que la force est conservative.*

**Remarque 12.6.** *L'énergie potentielle est toujours définie à une constante additive près.*

### II.2 Force dérivant d'une énergie potentielle

**Définition 12.7** (Force dérivant d'une énergie potentielle). *On dit qu'une force  $\vec{F}$  dérive d'une énergie potentielle s'il existe une fonction  $\mathcal{E}_p(x, y, z)$  telle que*

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathcal{E}_p.$$

**Remarque 12.8.** *Une force dérivant d'une énergie potentielle est toujours conservative, car on a alors  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathcal{E}_p$ , donc  $\delta\mathcal{W} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla}\mathcal{E}_p \cdot d\vec{r} = -d\mathcal{E}_p$ .*

### II.3 Exemples d'énergies potentielles

**Définition 12.9** (Énergie potentielle de pesanteur). *L'énergie potentielle de pesanteur  $\mathcal{E}_{pp}$  est l'énergie potentielle associée au poids  $\vec{P} = -mg\vec{u}_z = -\vec{\nabla}(mgz)$  d'un point matériel. Ainsi :*

$$\mathcal{E}_{pp} = mgz + \text{constante}.$$

**Définition 12.10** (Énergie potentielle élastique). *L'énergie potentielle élastique  $\mathcal{E}_{pe}$  est l'énergie potentielle associée à la tension  $\vec{T} = -kx\vec{u}_x = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$  d'un ressort. Ainsi :*

$$\mathcal{E}_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + \text{constante}.$$

**Définition 12.11** (Énergie potentielle gravitationnelle). *L'énergie potentielle gravitationnelle  $\mathcal{E}_{pg}$  est l'énergie potentielle associée à l'attraction gravitationnelle  $\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{mM}{r^2}\vec{u}_r = -\vec{\nabla}\left(-\mathcal{G}\frac{mM}{r}\right)$ . Ainsi :*

$$\mathcal{E}_{pg} = -\mathcal{G}\frac{mM}{r} + \text{constante}.$$

### II.4 Énergie mécanique

On considère un point matériel soumis à une force conservative  $\vec{F}_c$  et à une force non conservative  $\vec{F}_{nc}$  ( $\vec{F}_c$  et  $\vec{F}_{nc}$  peuvent éventuellement s'écrire comme sommes de plusieurs forces). On note  $\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$ . Le théorème de l'énergie cinétique (c.f. théorème 11.22) fournit alors

$$\Delta\mathcal{E}_c = \mathcal{W}(\vec{F}) \quad \text{ou} \quad d\mathcal{E}_c = \delta\mathcal{W}(\vec{F}_c) + \delta\mathcal{W}(\vec{F}_{nc}) = -d\mathcal{E}_p + \mathcal{W}(\vec{F}_{nc}).$$

Autrement dit,

$$d(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p) = \delta\mathcal{W}(\vec{F}_{nc}).$$

**Définition 12.12** (Énergie mécanique). *On définit alors l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$  du point matériel par*

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p.$$

**Propriété 12.13.** *La résultat précédent s'écrit alors  $d\mathcal{E}_m = \delta\mathcal{W}(\vec{F}_{nc})$ , ou encore :*

$$\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{W}(\vec{F}_{nc}).$$

**Propriété 12.14.** *On a donc  $d\mathcal{E}_m = \vec{F}_{nc} \cdot \vec{v} dt$ , d'où*

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc}).$$

## II.5 Stabilité

On considère un point matériel en mouvement sur un axe ( $Ox$ ) soumis à une force  $\vec{F} = F_x \vec{u}_x$ .

**Définition 12.15** (Position d'équilibre). *Le point  $x_0$  est dit position d'équilibre lorsque  $\vec{F}(x_0) = \vec{0}$ , i.e.  $\left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}\right)_{x_0} = 0$ , autrement dit,  $x_0$  correspond à un extremum d'énergie potentielle.*

**Vocabulaire 12.16.** *L'équilibre en  $x_0$  est dit stable si, pour  $x < x_0$ ,  $F_x > 0$  et pour  $x > x_0$ ,  $F_x < 0$ . Autrement dit, l'équilibre est stable si  $x_0$  correspond à un minimum d'énergie potentielle.*

Pour déterminer une condition de stabilité, écrivons  $x = x_0 + \varepsilon$  et effectuons le développement limité de  $\mathcal{E}_p$  :

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(x_0) + \underbrace{\varepsilon \left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}\right)_{x_0}}_0 + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{x_0} + \dots$$

**Propriété 12.17.** *L'équilibre en  $x_0$  est stable ssi  $\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{x_0} > 0$ .*

**Vocabulaire 12.18.** *Si  $\mathcal{E}_p = \text{constante}$ ,  $x_0$  est dit équilibre indifférent.*

## III Retour sur l'oscillateur harmonique

### III.1 Cas d'un équilibre stable

On considère toujours un point matériel en mouvement sur un axe ( $Ox$ ) soumis à une force  $\vec{F} = F_x \vec{u}_x$ . On appelle  $x_0$  une position d'équilibre stable. En notant  $x = x_0 + \varepsilon$ , on peut écrire, en effectuant le DL de  $F_x$ , et en utilisant  $F_x = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}$  :

$$F_x(x) = \underbrace{F_x(x_0)}_0 + \varepsilon \left(\frac{dF_x}{dx}\right)_{x_0} + \dots = -\varepsilon \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{x_0}.$$

Mais le PFD donne  $m\ddot{x} = F_x(x)$ . Comme  $\ddot{x} = \ddot{\varepsilon}$ , on a ainsi

$$m\ddot{\varepsilon} + \varepsilon \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{x_0} = 0,$$

## CHAPITRE 12. APPROCHE ÉNERGÉTIQUE DU MOUVEMENT D'UN POINT

---

ou encore, en notant  $k = \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{x_0}$  :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m}\varepsilon = 0.$$

Donc le système est un *oscillateur harmonique* (c.f. chapitre 1), et sa pulsation est

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{x_0}}{m}}.$$

**Remarque 12.19.** *On a approximé l'énergie potentielle au voisinage de  $x_0$  par une parabole.*

### III.2 Portrait de phase

Le portrait de phase de ce système (i.e. la représentation de  $\dot{x}$  en fonction de  $x$ ) sera donc constitué d'ellipses au voisinage de  $x_0$  et de courbes plus complexes ailleurs.

# Chapitre 13

## Incertitudes

**Définition 13.1** (Incertitude). *L'incertitude d'une mesure est la zone au sein de laquelle se trouve probablement la valeur vraie. Cette zone est définie par une dispersion et se quantifie par un écart-type.*

### I Vocabulaire et Notations

#### Vocabulaire 13.2.

- (i) *La grandeur que l'on veut mesurer est appelée mesurande.*
- (ii) *On appelle mesurage l'action de mesurer.*
- (iii) *Le résultat du mesurage est un ensemble de valeurs attribuées à un mesurande complété par toute information pertinente disponible, en particulier des informations sur l'incertitude de mesure.*

**Notation 13.3.** *On note  $x$  la valeur de la grandeur,  $\Delta X$  l'incertitude de mesure, et  $X$  le résultat de la mesure. Le résultat du mesurage s'écrit alors  $X = x \pm \Delta X$ , unité, niveau de confiance.*

### II Calcul d'une incertitude-type

Lorsqu'on a une série de valeurs expérimentales  $x_k$  correspondant à la même grandeur  $x$ , on calcule d'abord la moyenne arithmétique  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ , puis on calcule l'écart-type empirique corrigé  $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$ . L'*incertitude-type* s'obtient finalement par  $s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

On peut aussi estimer l'incertitude d'une mesure spécifique à partir de certaines informations : certificat d'étalonnage, classe des instruments, documentation constructeur, etc. En général, si un instrument a une précision définie par  $\pm a$ , l'*incertitude-type* sera approximé par  $s = \frac{a}{\sqrt{3}}$ . Dans certains cas (par exemple, si  $a$  est la largeur d'une graduation), il faut penser à diviser cette valeur par 2.

### III Incertitude-type élargie, niveau de confiance et incertitude relative

L'incertitude-type élargie  $\Delta X$  s'exprime sous la forme  $\Delta X = ks$ , où  $s$  est l'incertitude-type et  $k$  le facteur d'élargissement. Par exemple, pour un niveau de confiance à 95 %, on prendra  $k = 2$ .

L'incertitude relative vaut  $\frac{\Delta X}{x}$  et s'exprime en %.

### IV Incertitudes composées

On cherche à déterminer une grandeur physique  $\varphi$  à partir d'une grandeur mesurée  $x$ . Pour une petite variation  $\delta x$  en  $x$ , on peut écrire le développement limité de  $\varphi$  :  $\varphi(x + \delta x) = \varphi(x) + \delta x \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)$ . Donc la variation en  $\varphi$  sera donnée par  $\delta\varphi = \delta x \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)$ . De même, si  $\varphi$  dépend de plusieurs variables expérimentales  $x, y, z$ , on aura  $\delta\varphi = \delta x \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) + \delta y \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) + \delta z \left( \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)$ .

**Formule 13.4.** Si  $\varphi$  dépend de  $x, y, z$ , l'incertitude sur  $\varphi$  est donnée par

$$\Delta\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \Delta X^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \Delta Y^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \Delta Z^2},$$

où  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  et  $\Delta Z$  sont les incertitudes sur  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

**Formule 13.5.** Deux cas particuliers importants :

$$\Delta(X + Y + Z) = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}. \quad (\text{i})$$

$$\frac{\Delta(XYZ)}{xyz} = \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Z}{z}\right)^2}. \quad (\text{ii})$$

# Chapitre 14

## Mouvement de Particules Chargées dans un Champ Électromagnétique

On s'intéresse ici à l'action d'un champ électromagnétique sur une particule chargée non relativiste en mouvement dans un référentiel galiléen.

### I Force de Lorentz

**Loi 14.1** (Interaction électromagnétique). *La force  $\vec{F}$  agissant sur une particule de charge  $q$  et de vitesse  $\vec{v}$ , dite force de Lorentz, est donnée par*

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right),$$

où  $\vec{E}$  est le champ électrique et  $\vec{B}$  le champ magnétique.

**Remarque 14.2.** *La formule précédente est valable pour  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  quelconques, pas nécessairement uniformes (i.e. indépendants de l'espace) ou statiques (i.e. indépendants du temps).*

Le PFD donne donc  $\vec{a} = \frac{q}{m} \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$ . On ne peut donc pas déterminer séparément  $q$  et  $m$  par l'étude du mouvement. De plus, la puissance de la force de Lorentz est donnée par  $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$ , et le théorème de l'énergie cinétique donne  $\Delta \mathcal{E}_c = \int q \vec{E} \cdot \vec{v} dt$ . Donc seul le champ électrique est responsable des modifications de la norme de la vitesse.

### II Mouvement dans un champ électrostatique uniforme

#### II.1 Exemple simple

On considère une particule  $M$  de charge  $q$  lancée dans un champ électrostatique uniforme avec une vitesse  $\vec{v}_0$  faisant avec le plan horizontal un angle  $\alpha$ . On note  $O$  la position de  $M$  à l'instant initial,  $(Oz)$  l'axe tel que  $\vec{E} = E \vec{u}_z$ , et  $(Oxz)$  le plan contenant  $\vec{v}_0$  tel que  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .



## CHAPITRE 14. MOUVEMENT DE PARTICULES CHARGÉES DANS UN CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Le PFD donne alors  $m\vec{a} = q\vec{E}$ , soit  $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ . Par intégration, on obtient  $\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}t + \vec{v}_0$ , puis

$$\overrightarrow{OM} = \frac{q}{2m}\vec{E}t^2 + \vec{v}_0t.$$

En éliminant le temps, on obtient l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$z = \frac{qE}{2mv_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha.$$

### II.2 Application du théorème de l'énergie cinétique

**Loi 14.3.** *Le champ électrique  $\vec{E}$  est lié au potentiel électrique  $V$  par*

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}(V) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z\right).$$

On a ainsi  $\vec{F} = q\vec{E} = -\vec{\nabla}(qV)$ . La force électrostatique dérive donc d'une énergie potentielle dite *énergie potentielle électrostatique* et donnée par

$$\boxed{\mathcal{E}_p = qV + \text{constante.}}$$

**Propriété 14.4.** *La conservation de l'énergie mécanique entre deux points  $A$  et  $B$  s'écrit :*

$$\frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) + q(V_B - V_A) = 0.$$

### II.3 Canon à électrons

On considère deux plaques parallèles ( $A$ ) et ( $C$ ) entre lesquelles on applique une tension  $U_{AC} = V_A - V_C$ . Un champ électrique uniforme  $\vec{E} = -\frac{U_{AC}}{d}\vec{u}_z$  règne entre ( $A$ ) et ( $C$ ), avec  $d = AC$ . Un filament chauffant émet des électrons qui pénètrent entre les deux plaques au niveau de la plaque ( $C$ ), avec une vitesse initiale  $\vec{v}_C$  colinéaire à  $\vec{E}$ . La conservation de l'énergie mécanique donne alors  $\frac{1}{2}m(v_A^2 - v_C^2) + q(V_A - V_C) = 0$ , d'où :

$$v_A = \sqrt{v_C^2 + \frac{2e}{m}U_{AC}}.$$

## III Mouvement dans un champ magnétostatique uniforme

On considère une particule  $M$  de charge  $q$  lancée dans un champ magnétostatique uniforme avec une vitesse  $\vec{v}_0$ . On note  $O$  la position de  $M$  à l'instant initial, ( $Oz$ ) l'axe tel que  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ , et ( $Oxz$ ) le plan contenant  $\vec{v}_0$ , et on note  $\vec{v}_0 = v_{0,x}\vec{u}_x + v_{0,z}\vec{u}_z$ .

Le PFD donne  $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ , c'est-à-dire :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = qB \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc  $\ddot{z} = 0$ , d'où  $\dot{z} = v_{0,z}$  et  $z = v_{0,z}t$ .

**Définition 14.5** (Pulsation cyclotron). *On note  $\omega = \frac{qB}{m}$ , et on définit la pulsation cyclotron  $\omega_c$  par  $\omega_c = |\omega|$ .*

## CHAPITRE 14. MOUVEMENT DE PARTICULES CHARGÉES DANS UN CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Alors  $x$  et  $y$  vérifient le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega \dot{x} \end{cases} .$$

Pour résoudre ce système, on pose  $u = x + iy$  ; on obtient alors par CL des deux équations  $\dot{x} + i\dot{y} = \omega \dot{y} - i\omega \dot{x} = -i\omega(\dot{x} + i\dot{y})$ . On a ainsi :

$$\ddot{u} = -i\omega \dot{u} .$$

La résolution de cette ED donne

$$u(t) = i \frac{v_{0,x}}{\omega} (e^{-i\omega t} - 1) .$$

On en déduit alors

$$x(t) = \frac{v_{0,x}}{\omega} \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{v_{0,x}}{\omega} (\cos(\omega t) - 1) .$$

Donc l'équation cartésienne de la trajectoire s'écrit

$$x^2 + \left( y + \frac{v_{0,x}}{\omega} \right)^2 = \left( \frac{v_{0,x}}{\omega} \right)^2 .$$

Ainsi, dans le plan  $(Oxy)$ , la trajectoire est un cercle de rayon  $\left| \frac{v_{0,x}}{\omega} \right|$  et de centre  $(0, -\frac{v_{0,x}}{\omega})$ . On a de plus  $z = v_{0,z}t$  donc la trajectoire est *hélicoïdale*.

On peut calculer le *pas h de l'hélice*, c'est-à-dire la variation d'altitude entre deux cercles consécutifs. Pour cela, on écrit la période du mouvement dans le plan  $(Oxy)$  :  $T = \left| \frac{2\pi}{\omega} \right| = \left| \frac{2\pi m}{qB} \right|$ . On a alors

$$h = z(t+T) - z(t) = 2\pi \left| \frac{mv_{0,z}}{qB} \right| .$$

**Remarque 14.6.** Si  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ , alors  $\vec{v} = \vec{0}$  à tout instant. Ainsi, un champ magnétique ne peut pas mettre en mouvement une particule immobile.

## IV Mouvement dans un champ électrostatique et magnéto-statique uniforme

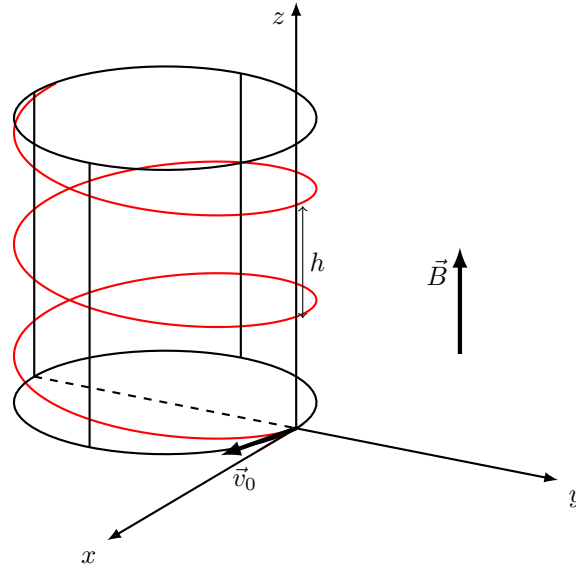
On s'intéresse maintenant à l'action combinée d'un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}$  et d'un champ magnéto-statique uniforme  $\vec{B}$ .

On commence par étudier le cas où  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont parallèles. En notant  $\vec{E} = E\vec{u}_z$ ,  $\vec{B} = B\vec{u}_z$  et  $\vec{v}_0 = v_{0,x}\vec{u}_x + v_{0,z}\vec{u}_z$ , on a

$$\begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}B \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}B \\ m\ddot{z} = qE \end{cases} ,$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_{0,x}}{\omega} \sin(\omega t) \\ y(t) = \frac{v_{0,x}}{\omega} (\cos(\omega t) - 1) \\ z(t) = \frac{q}{2m} Et^2 + v_{0,z}t \end{cases} .$$



Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme

On étudie ensuite le cas général. On a

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

On note  $\vec{v}_D = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}$ , qu'on appelle *vitesse de dérive*. On va ensuite effectuer un *changement de référentiel*, et se placer dans le référentiel en translation par rapport au référentiel du laboratoire à la vitesse  $\vec{v}_D$ . On pose donc  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_D$ , et il vient, comme  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt}$  :

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}'}{dt} &= q\vec{E} + q\vec{v}' \wedge \vec{B} + q \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} \right) \wedge \vec{B} \\ &= q\vec{E} + q\vec{v}' \wedge \vec{B} - q \frac{B^2}{B^2} \vec{E} + q \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{B^2} \vec{B} \\ &= q\vec{v}' \wedge \vec{B} + q \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{B^2} \vec{B} \\ &= q (\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'), \end{aligned}$$

avec  $\vec{B}' = \vec{B}$  et  $\vec{E}' = \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{B^2} \vec{B}$ . On retrouve l'équation du mouvement d'une particule soumise à un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}'$  et à un champ magnétostatique uniforme  $\vec{B}'$ , avec  $\vec{E}'$  et  $\vec{B}'$  parallèles.

# Chapitre 15

## Pendule Pesant Sans Frottements

**Vocabulaire 15.1** (Pendule pesant). *On appelle pendule pesant tout solide mobile autour d'un axe (en principe horizontal) ne passant pas par le centre de gravité du solide, et placé dans un champ de pesanteur.*

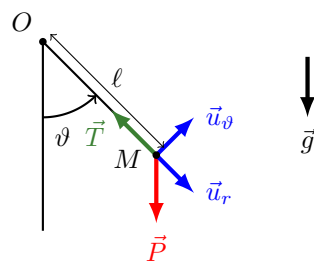
**Vocabulaire 15.2** (Pendule simple). *Un pendule simple est un pendule constitué d'un petit objet accroché à un fil (ou une tige) de masse négligeable devant celle de l'objet.*

### I Étude théorique du modèle du pendule simple

On considère un objet ponctuel  $M$  de masse  $m$  suspendu à un fil de longueur  $\ell$  fixé au point  $O$ , et faisant un angle  $\vartheta$  avec l'axe vertical. Le PFD donne alors  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$ , où  $\vec{P}$  est le poids de  $M$  et  $\vec{T}$  est la tension du fil. En projection sur le vecteur  $\vec{u}_\vartheta$  du repère cylindrique, il vient :

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{\ell} \sin \vartheta = 0.$$

Cette équation est celle d'un *oscillateur non harmonique*. La période  $T$  des oscillations dépend de l'amplitude du mouvement ; par contre, elle ne dépend pas de la masse.



Pendule simple

Pour de faibles oscillations, on a  $\vartheta \ll 1$ , donc  $\sin \vartheta \approx \vartheta$ . On obtient ainsi l'ED linéaire  $\ddot{\vartheta} + \frac{g}{\ell} \vartheta = 0$ . C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de période

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

**Vocabulaire 15.3** (Isochronisme). *Comme la période est indépendante de l'amplitude, on parle d'isochronisme des petites oscillations.*

On étudie ensuite le cas d'une amplitude quelconque. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre l'angle maximal  $\vartheta_0$  et un angle  $\vartheta$  quelconque donne :

$$\underbrace{0 - \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\vartheta}^2}_{\Delta\mathcal{E}_c} = \underbrace{-mgl(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}_{\mathcal{W}(\vec{P})}.$$

Il vient ainsi

$$\boxed{\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}}.$$

On obtient donc la période :

$$T = 4 \int_0^{T/4} dt = 4 \int_0^{T/4} \frac{1}{\frac{d\vartheta}{dt}} d\vartheta = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}K,$$

avec  $K = \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}}$ . Or, on a  $K \approx \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\vartheta_0^2}{16}\right)$ , donc :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\vartheta_0^2}{16}\right),$$

avec  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ .

## II Étude du pendule pesant composé

### II.1 Moment d'inertie

Considérons un objet composé de plusieurs points solidaires  $M_i$  de masse  $m_i$ . Cet objet tourne autour d'un axe  $\Delta$  passant par  $O$ , à la vitesse  $\dot{\vartheta}$ . On note  $r_i = OM_i$ . La calcul de l'énergie cinétique de cet objet donne

$$\mathcal{E}_c = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i r_i^2 m_i \right) \dot{\vartheta}^2.$$

**Définition 15.4** (Moment d'inertie). *On définit le moment d'inertie  $J$  par rapport à l'axe  $\Delta$  par*

$$\boxed{J = \sum_i r_i^2 m_i}.$$

**Remarque 15.5.** *Dans un solide  $S$  considéré comme ensemble continu de points matériels  $P$  affectés d'une masse volumique  $\rho_P$ , le moment d'inertie s'écrit*

$$J = \iiint_S r_P^2 \rho_P d\mathcal{V},$$

où  $r_P$  représente la distance du point  $P$  à l'axe.

L'énergie cinétique s'écrit alors simplement :

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J\dot{\vartheta}^2}.$$

## II.2 Théorème de Huygens

**Théorème 15.6** (Théorème de Huygens). *On considère un axe  $\Delta$  passant par le centre de masse d'un solide  $S$  de masse  $m$ , et un axe  $\Delta'$  parallèle à  $\Delta$  et distant de  $d$ . Alors*

$$J_{\Delta'} = J_{\Delta} + md^2.$$

## II.3 Équation du mouvement

L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit  $\mathcal{E}_p = Mgz_G = -Mg\ell_G \cos \vartheta$ , où  $G$  est le barycentre du solide,  $z_G$  sa cote, et  $\ell_G$  sa distance au point  $O$ .

Comme le système est conservatif, on peut écrire

$$\frac{1}{2}J\dot{\vartheta}^2 - Mg\ell_G \cos \vartheta = \text{constante}.$$

En dérivant cette relation, on obtient :

$$J\ddot{\vartheta} + Mg\ell_G \sin \vartheta = 0.$$

## II.4 Exemple d'une tige

Considérons une tige homogène de masse  $m$ , de longueur  $\ell$ , tournant autour d'une de ses extrémités  $O$ . Son moment d'inertie par rapport à  $O$  est

$$J = \int_0^{\ell} \mu x^2 dx = \frac{1}{3}\mu\ell^3 = \frac{1}{3}m\ell^2,$$

où  $\mu = \frac{m}{\ell}$  est la masse linéique de la tige. L'équation du mouvement est donc

$$\ddot{\vartheta} + \frac{3g}{2\ell} \sin \vartheta = 0.$$

# Chapitre 16

## Moment Cinétique et Applications

### I Moment cinétique

#### I.1 Moment cinétique d'un point

**Définition 16.1** (Moment cinétique par rapport à un point). *Le moment cinétique d'un point matériel  $M$  par rapport à un point  $O$  est*

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p},$$

où  $\vec{p} = m\vec{v}$  est la quantité de mouvement de  $M$ .

**Définition 16.2** (Moment cinétique par rapport à un axe orienté). *Le moment cinétique d'un point matériel  $M$  par rapport à un axe orienté  $\Delta$  est*

$$L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta,$$

où  $\vec{L}_O$  est le moment cinétique de  $M$  par rapport à un point  $O$  quelconque de  $\Delta$ , et  $\vec{u}_\Delta$  est le vecteur unitaire de  $\Delta$ .

#### I.2 Moment cinétique d'un système

**Définition 16.3** (Moment cinétique d'un système). *Le moment cinétique d'un système est la somme des moments cinétiques des points du système.*

Considérons un système constitué de points matériels  $M_i$ . Son moment cinétique par rapport à un point  $O$  est

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_O(M_i).$$

Et son moment cinétique par rapport à un axe  $\Delta$  est  $L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta$ .

#### I.3 Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe. Pour un petit volume  $dV$  du solide, on a  $\vec{L}_O(M) = \rho dV \cdot \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = \rho dV (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge (\omega r\vec{u}_\theta) = \rho dV (\omega r^2 \vec{u}_z - z\omega r \vec{u}_r)$ , donc  $L_\Delta(M) = \vec{L}_O(M) \cdot \vec{u}_z = \rho dV \omega r^2$ .

**Formule 16.4.** Pour le solide entier, on a donc  $L_\Delta = (\iint_S \rho dV r^2) \omega$ , soit

$$L_\Delta = J_\Delta \omega.$$

où  $J_\Delta$  est le moment d'inertie du solide par rapport à  $\Delta$ .

## II Moment d'une force

### II.1 Moment d'une force

**Définition 16.5** (Moment d'une force par rapport à un point). Le moment d'une force  $\vec{F}$  par rapport à un point  $O$  est

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}.$$

**Définition 16.6** (Moment d'une force par rapport à un axe orienté). Le moment d'une force  $\vec{F}$  par rapport à un axe orienté  $\Delta$  est

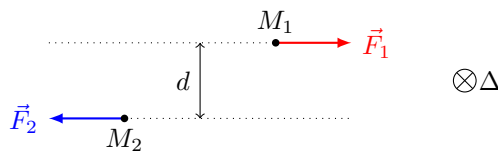
$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta.$$

### II.2 Moment d'un couple de forces

**Vocabulaire 16.7** (Couple de forces). On appelle couple un système de forces dont la résultante est nulle.

On considère un couple de forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  appliquées respectivement en  $M_1$  et  $M_2$ . Le moment total du couple est la somme des moments :  $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_2 = \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_1 - \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_1$ , c'est-à-dire :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{M}_2 \vec{M}_1 \wedge \vec{F}_1.$$



Couple de forces

On a donc

$$|\mathcal{M}_\Delta| = d \cdot \|\vec{F}_1\|,$$

où  $d$  est la distance entre les droites dirigées par  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  passant respectivement par  $M_1$  et  $M_2$ .

### II.3 Liaison pivot

**Vocabulaire 16.8** (Liaison pivot). Une liaison pivot est une liaison entre un bâti fixe et une pièce mobile donnant à celle-ci un seul degré de liberté de rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ .



Si une liaison pivot est parfaite, elle n'exerce aucun moment selon l'axe  $\Delta$ . Sinon, elle exerce un *couple* de frottement dont le moment par rapport à l'axe est de signe opposé au sens de rotation.

### III Théorème du moment cinétique

#### III.1 Pour un point matériel

**Théorème 16.9** (Théorème du moment cinétique).  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ .

#### III.2 Pour un système de points matériels

**Théorème 16.10** (Théorème du moment cinétique).

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{ext}})}$$

En effet, on a  $\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_{O,i}$ , donc  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_{O,i}}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{i,\text{int}}) + \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{i,\text{ext}})$ . Or on peut remarquer que  $\sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{i,\text{int}}) = \vec{0}$ , d'où  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{i,\text{ext}}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{ext}})$ .

### IV Approche énergétique du solide en rotation autour d'un axe

#### IV.1 Énergie cinétique

**Formule 16.11.** L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe  $\Delta$  est :

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2}$$

où  $J_\Delta$  est le moment d'inertie du solide par rapport à  $\Delta$ .

#### IV.2 Puissance d'une force

**Formule 16.12.** Pour un solide en rotation autour d'un axe  $\Delta$ , la puissance d'une force est

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \cdot \omega}$$

#### IV.3 Théorème de la puissance cinétique pour un solide en rotation

**Théorème 16.13** (Théorème de la puissance cinétique).

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext}})$$

# Chapitre 17

## Forces Centrales Conservatives

**Définition 17.1** (Force centrale). Une force  $\vec{F}$  s'appliquant en un point  $M$  est dite centrale lorsque sa droite d'action passe constamment par un point fixe  $O$ . Elle s'écrit alors sous la forme  $\vec{F} = F\vec{u}_r$ , avec  $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$ .

### I Propriétés

On s'intéresse au mouvement d'un point matériel  $M$  soumis à une force centrale conservative  $\vec{F}$ .

#### I.1 Conservation du moment cinétique

Le théorème du moment cinétique donne

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}.$$

Donc  $\vec{L}_O = \overrightarrow{\text{constante}}$ .

#### I.2 Planéité du mouvement

Par ce qui précède, on a  $\vec{L}_O = m \cdot \vec{OM} \wedge \vec{v} = m \cdot \vec{OM}_0 \wedge \vec{v}_0$ , où  $M_0$  est la position initiale et  $\vec{v}_0$  la vitesse initiale. Cela indique que, à tout instant, les vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{v}$  sont dans le plan  $\mathfrak{P} = (\vec{OM}_0, \vec{v}_0)$ . Donc la trajectoire est incluse dans le plan  $\mathfrak{P}$ .

On utilisera donc les coordonnées cylindriques pour décrire le mouvement, en prenant  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\vartheta$  dans le plan  $\mathfrak{P}$ .

#### I.3 Constante des aires

On a  $\vec{L}_O = mr^2\dot{\vartheta}\vec{u}_z = \overrightarrow{\text{constante}}$ . Par conséquent,  $r^2\dot{\vartheta} = \text{constante}$ .

**Définition 17.2** (Constante des aires). On définit la constante des aires par

$$\mathcal{C} = r^2\dot{\vartheta}.$$

On considère l'aire  $d\mathcal{A}$  balayée par le point  $M$  pendant une durée  $dt$ . On a  $d\mathcal{A} = \left\| \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} dt \right\| = \frac{1}{2} |\mathcal{C}| dt$ . Il vient ainsi

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} |\mathcal{C}|.$$

Pendant une durée  $\Delta t$  quelconque, l'aire balayée est donc

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2} |\mathcal{C}| \Delta t.}$$

**Remarque 17.3.** *On a montré que, pour une force centrale,  $r^2\dot{\vartheta} = \text{constante}$  et le mouvement est plan. On peut montrer réciproquement que pour un mouvement plan t.q.  $r^2\dot{\vartheta} = \text{constante}$ , la force appliquée est centrale.*

#### I.4 Énergie potentielle effective

L'énergie mécanique s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \\ &= \frac{1}{2} m \underbrace{(\dot{r}^2 + (r\dot{\vartheta})^2)}_{v^2} + \mathcal{E}_p(r) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\mathcal{E}_p(r) + \frac{1}{2} m \frac{\mathcal{C}^2}{r^2}}_{\mathcal{E}_{\text{peff}}(r)}. \end{aligned}$$

**Définition 17.4** (Énergie potentielle effective). *L'énergie potentielle effective est définie par*

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{peff}}(r) = \mathcal{E}_p(r) + \frac{1}{2} m \frac{\mathcal{C}^2}{r^2}.}$$

Puisque la force  $\vec{F}$  est conservative, le théorème de l'énergie cinétique donne alors

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{\text{peff}}(r) = \text{constante}.$$

#### I.5 Formules de Binet

On cherche à exprimer  $v^2$  et  $a$  en fonction de  $r$  et  $\vartheta$ , sans dépendance temporelle.

Pour trouver  $v^2$ , on élimine le temps en utilisant le fait que  $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$  :

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{r}^2 + (r\dot{\vartheta})^2 \\ &= \left( \frac{dr}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \frac{\mathcal{C}^2}{r^2} \\ &= \frac{\mathcal{C}^2}{r^4} \cdot \left( \frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 + \frac{\mathcal{C}^2}{r^2}. \end{aligned}$$

On pose  $u = \frac{1}{r}$ , on a alors  $\frac{du}{d\vartheta} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\vartheta}$  ; on obtient ainsi

$$\boxed{v^2 = \mathcal{C}^2 \left( \left( \frac{du}{d\vartheta} \right)^2 + u^2 \right).}$$

On raisonne de même pour trouver  $a$  :

$$\begin{aligned} a = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \cdot \frac{C}{r^2} \right) - \frac{C^2}{r^3} \\ &= -C \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{d\vartheta} \right) - C^2 u^3 = -C \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{du}{d\vartheta} \right) \cdot \frac{d\vartheta}{dt} - C^2 u^3, \end{aligned}$$

$$\boxed{a = -C^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u \right)}.$$

On voit ainsi que la connaissance de la trajectoire donne accès à la vitesse et à l'accélération.

## II Cas du champ newtonien

### II.1 Quelques notions sur les coniques

Une *conique* est décrite par l'équation polaire

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}},$$

où  $p$  est le *paramètre* de la conique, et  $e$  son *excentricité*.

Il existe trois types de coniques :

- (i) Si  $e < 1$ , la conique est une *ellipse*.
- (ii) Si  $e = 1$ , la conique est une *parabole*.
- (iii) Si  $e > 1$ , la conique est une *hyperbole*.

### II.2 Force et énergie potentielle

**Formule 17.5.** La force d'attraction gravitationnelle est donnée par

$$\boxed{\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r}.$$

L'énergie potentielle associée est

$$\boxed{\mathcal{E}_p = -\mathcal{G} \frac{mM}{r} + \text{constante}}.$$

### II.3 Lois de Kepler

Les trois *lois de Kepler* sont relatives au mouvement des planètes autour du soleil. Étant donné les ordres de grandeur des masses des planètes du système solaire, on peut faire les approximations suivantes :

- (i) La masse des planètes est négligeable devant celle du soleil.
- (ii) Le soleil peut être considéré comme immobile.
- (iii) On peut considérer que chaque planète n'est soumise qu'à une force centrale conservative : l'attraction gravitationnelle du soleil.

**Loi 17.6** (Lois de Kepler).

- (i) Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers.
- (ii) Le rayon vecteur soleil-planète balaye des aires égales en des temps égaux.
- (iii) Le carré de la période orbitale des planètes est proportionnel au cube du grand axe de leur ellipse.

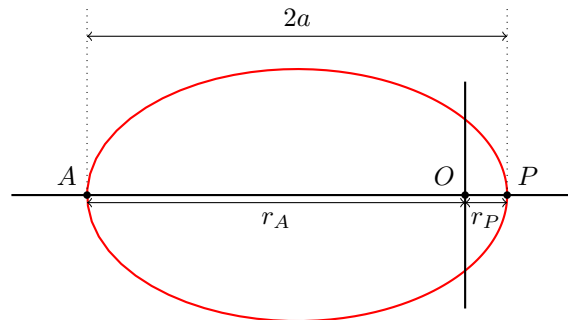
La première loi vient de la dépendance en  $\frac{1}{r^2}$  de la force d'attraction gravitationnelle  $\vec{F}$ . Notons  $k = \mathcal{G}mM$ ; le PFD donne alors  $m\vec{a} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}_r = -ku^2\vec{u}_r$ , avec  $u = \frac{1}{r}$ . Or, la formule de Binet s'écrit  $\vec{a} = -\mathcal{C}^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u\right)\vec{u}_r$ . On a donc  $m\mathcal{C}^2\left(\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u\right) = k$ , d'où en notant  $p = \frac{m\mathcal{C}^2}{k}$  :

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = \frac{1}{p}.$$

La résolution de cette ED donne, en choisissant l'origine des axes t.q. le déphasage soit nul :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}.$$

C'est l'équation polaire d'une *conique*. Dans le cas des planètes, cette conique est une *ellipse* car le mouvement est périodique.



Ellipse

La deuxième loi est quant à elle une conséquence de l'existence de la constante des aires, puisque la force  $\vec{F}$  est centrale.

## II.4 Nature de la trajectoire en fonction de l'énergie

L'énergie mécanique s'écrit

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{C}^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r),$$

avec  $\mathcal{E}_p(r) = -\frac{k}{r}$  en fixant l'origine des énergies potentielles de sorte que  $\mathcal{E}_p(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$ .

On considère d'abord le cas d'un *mouvement elliptique*. En A et P, on a  $\dot{r} = 0$ , donc  $\mathcal{E}_m(A/P) = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{C}^2}{r_{A/P}^2} - \frac{k}{r_{A/P}}$ . Or l'énergie mécanique est constante, donc  $r_A$  et  $r_P$  sont solutions d'une même équation du second degré :

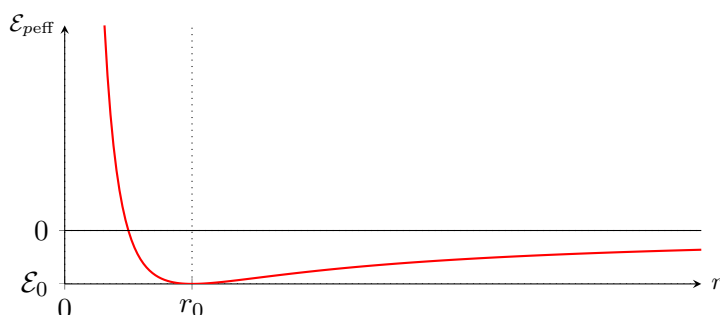
$$\mathcal{E}_m r_{A/P}^2 + k r_{A/P} - \frac{1}{2}m\mathcal{C}^2 = 0.$$

Il vient alors  $2a = r_A + r_P = -\frac{k}{\mathcal{E}_m}$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{k}{2a}.$$

On remarque en particulier que, pour que la trajectoire soit une ellipse, il faut que  $\mathcal{E}_m < 0$ . On appelle cet état un *état lié*. L'énergie mécanique ne dépend alors que du grand axe de l'ellipse  $2a$  et est indépendante de l'excentricité  $e$ . Il existe donc plusieurs trajectoires elliptiques avec la même énergie.

Énergie potentielle effective associée à l'attraction gravitationnelle



Si l'énergie mécanique est positive ou nulle, on est dans un *état de diffusion*; la particule part à l'infini. Le cas limite correspond à une énergie mécanique nulle et décrit une parabole.

Pour démontrer ce résultat, on utilise la formule de Binet :  $v^2 = \mathcal{C}^2 \left( \left( \frac{du}{d\vartheta} \right)^2 + u^2 \right)$ . On écrit alors  $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}m\mathcal{C}^2 \left( \left( \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1+e\cos\vartheta}{p} \right) \right)^2 + \left( \frac{1+e\cos\vartheta}{p} \right)^2 \right) - k \left( \frac{1+e\cos\vartheta}{p} \right)$ . On obtient ainsi

$$\mathcal{E}_m = \frac{k}{2p}(e^2 - 1).$$

On voit donc que  $\mathcal{E}_m$  est du signe de  $(e - 1)$ .

## II.5 Cas du mouvement circulaire

Pour un mouvement circulaire, on a  $r = \text{constante}$ . En se plaçant dans une base de Frenet  $(\vec{T}, \vec{N})$ , il vient

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{dv}{dt} \vec{T} + m \frac{v^2}{r} \vec{N}.$$

Comme  $\vec{F}$  est colinéaire à  $\vec{N}$ , on obtient  $v = \text{constante}$  et  $m \frac{v^2}{r} = \mathcal{G} \frac{mM}{r^2}$ , donc

$$v^2 = \frac{\mathcal{G}M}{r}.$$

On peut alors obtenir la période du mouvement :

$$T^2 = \left( \frac{2\pi r}{v} \right)^2 = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M} r^3.$$

Cela démontre la troisième loi de Kepler dans le cas particulier du mouvement circulaire.

### III Cas du champ coulombien

#### III.1 Force et énergie potentielle

**Formule 17.7.** La force d'interaction électrostatique est donnée par

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r^2} \vec{u}_r.$$

L'énergie potentielle associée est

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r} + \text{constante}.$$

#### III.2 Cas d'une force attractive

Si  $qQ < 0$ , on pose  $k = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} > 0$ , et on a alors  $\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r$ . On retrouve exactement la même forme que pour le champ newtonien ; on obtient ainsi les résultats suivants :

- (i) Le mouvement est *plan*,
- (ii) On a existence de la *constante des aires*,
- (iii) La trajectoire est une *conique*,
- (iv) C'est une *ellipse* si  $\mathcal{E}_m < 0$ , une *parabole* si  $\mathcal{E}_m = 0$  ou une *hyperbole* si  $\mathcal{E}_m > 0$ .

#### III.3 Cas d'une force répulsive

Si  $qQ > 0$ , on peut retrouver certains résultats (planéité du mouvement et constante des aires) à partir du fait que la force  $\vec{F}$  est centrale. La dépendance en  $\frac{1}{r^2}$  de  $\vec{F}$  entraîne de plus une trajectoire conique. Et on a  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r}}_{>0} > 0$ . Il n'y a donc que des *états de diffusion*, et la trajectoire est un *arc d'hyperbole*.

# Chapitre 18

## Description Macroscopique d'un Système à l'État d'Équilibre

La *thermodynamique* est l'étude des phénomènes physiques dans lesquels interviennent des transferts de chaleur.

### I Quelques définitions

#### I.1 Systèmes thermodynamiques

En thermodynamique, la matière est considérée à l'échelle *macroscopique*, i.e. sans référence à sa structure moléculaire.

**Définition 18.1** (Système, milieu extérieur et univers).

- (i) On appelle système l'ensemble des corps étudiés contenus à l'intérieur d'une surface fermée.
- (ii) Tout ce qui ne fait pas partie du système constitue le milieu extérieur.
- (iii) L'ensemble {système + milieu extérieur} constitue l'univers.

**Vocabulaire 18.2** (Systèmes ouverts, fermés, isolés). On distingue trois types de systèmes :

	<i>Apport de matière</i>	<i>Apport d'énergie</i>
<b>Système ouvert</b>	<i>Oui</i>	<i>Oui</i>
<b>Système fermé</b>	<i>Non</i>	<i>Oui</i>
<b>Système isolé</b>	<i>Non</i>	<i>Non</i>

#### I.2 Description d'un système

**Vocabulaire 18.3** (Variables d'état). Les variables d'état sont des grandeurs physiques macroscopiques permettant de décrire l'état d'un système. Il en existe deux types :

- (i) Les variables d'état extensives sont relatives au système entier ; elles sont additives lors de la réunion de deux systèmes.
- (ii) Les variables d'état intensives, définies en un point, sont indépendantes de la quantité de matière.



## CHAPITRE 18. DESCRIPTION MACROSCOPIQUE D'UN SYSTÈME À L'ÉTAT D'ÉQUILIBRE

---

**Vocabulaire 18.4** (Équilibre). *On dit qu'un système est en équilibre lorsque toutes ses variables d'état demeurent constantes au cours du temps.*

**Vocabulaire 18.5** (Équation d'état). *Généralement, l'état d'un système peut être défini par plusieurs variables d'état qui ne sont pas indépendantes les unes des autres. Les relations existant entre ces diverses variables sont appelées équations d'état.*

**Exemple 18.6.** *Pour un système fluide fermé, la pression  $P$ , le volume  $V$  et la température  $T$  ne sont pas indépendants. Il existe donc une équation d'état  $f(P, V, T) = 0$ .*

**Définition 18.7** (Coefficients thermoélastiques). *On définit les coefficients thermoélastiques suivants :*

- (i) Coefficient de dilatation isobare :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P.$$

- (ii) Coefficient de variation de pression isochore :

$$\beta = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V.$$

- (iii) Coefficient de compressibilité isotherme :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T.$$

*On a alors la relation*

$$\alpha = P\beta\chi_T.$$

**Vocabulaire 18.8** (Phase). *On appelle phase toute partie d'un système thermodynamique dont les paramètres d'état intensifs sont continus. Si de plus ces paramètres sont les mêmes en tout point, la phase est homogène.*

### I.3 Transformations d'un système

**Vocabulaire 18.9** (Transformations réversibles ou irréversibles).

- (i) *Une transformation réversible est une transformation qui se fait par succession d'états d'équilibre infiniment voisins, la condition d'équilibre concernant aussi bien le système étudié que le milieu extérieur avec lequel il interagit.*
- (ii) *Une transformation est irréversible lorsque la transformation inverse ne peut pas être réalisée.*

**Vocabulaire 18.10** (Transformations quasi-statiques). *Une transformation quasi-statique est constituée d'une suite d'états d'équilibre internes au système étudié.*

**Vocabulaire 18.11** (Transformations particulières).

- (i) Transformation adiabatique : *sans échange de chaleur avec le milieu extérieur.*
- (ii) Transformation isobare : *la pression du système reste définie et constante.*
- (iii) Transformation monobare : *la pression extérieure reste définie et constante.*
- (iv) Transformation isochore : *le volume du système reste défini et constant.*
- (v) Transformation isotherme : *la température du système reste définie et constante.*
- (vi) Transformation cyclique : *l'état final et l'état initial sont rigoureusement identiques.*

## II L'état fluide

Un *fluide* est un corps qui peut prendre une forme quelconque : il prend donc la forme du récipient qui le contient. Il est décrit par des *variables d'état intensives* ( $\rho, P, T, \dots$ ). Ces variables, définies localement, varient continûment à l'échelle macroscopique.

Il existe deux grandes catégories de fluides : les *liquides* et les *gaz*.

## III Pression dans un fluide parfait en équilibre dans le champ de pesanteur uniforme

### III.1 Pression en un point

On considère un fluide en équilibre. On imagine un cylindre placé dans le fluide ; on choisit une petite surface  $dS$  du cylindre et on définit le *vecteur surface élémentaire*  $d\vec{S}$ , de norme  $dS$ , de direction perpendiculaire à la surface et allant du fluide vers l'intérieur du cylindre. La force  $d\vec{F}$  exercée par le fluide au point considéré est alors colinéaire à  $d\vec{S}$ .

**Définition 18.12** (Pression en un point). *La pression en un point est la grandeur  $P$  telle que*

$$\boxed{d\vec{F} = P d\vec{S}.}$$

$P$  s'exprime en Pa, avec  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ .

### III.2 Variation de pression dans un liquide

On considère un liquide placé dans le champ de pesanteur uniforme. On cherche à exprimer la pression  $P$  en fonction de l'altitude  $z$ . On choisit deux altitudes  $z_1$  et  $z_2$  avec  $z_2 > z_1$ , et on imagine un volume cubique de liquide de côté  $(z_2 - z_1)$  ; on note  $S = (z_2 - z_1)^2$ . Les forces exercées sur ce cube sont le poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  et les forces de pression verticales  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ . Le PFD en projection sur  $(Oz)$  donne alors  $F_{1z} + F_{2z} - mg = 0$ , i.e.  $SP(z_1) - SP(z_2) = S(z_2 - z_1)\rho g$ , d'où  $P(z_1) - P(z_2) = \rho g(z_2 - z_1)$ . Ainsi, en prenant l'altitude nulle comme référence, il vient

$$\boxed{P(z) = P(0) - \rho g z.}$$

### III.3 Applications

Quelques applications de cette formule :

- (i) Le *manomètre* permet de mesurer la différence de pression entre un ballon et le milieu extérieur.
- (ii) Le *baromètre à mercure* permet de mesurer la pression atmosphérique.
- (iii) La *presse hydraulique* permet de transmettre un effort démultiplié ; elle est équivalente à un bras de levier.

### III.4 La poussée d'Archimède

On considère un solide de hauteur  $h$  placé à l'altitude  $z_0$  dans un liquide dans le champ de pesanteur uniforme. Les forces exercées sur ce solide sont le poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  et les forces de

## CHAPITRE 18. DESCRIPTION MACROSCOPIQUE D'UN SYSTÈME À L'ÉTAT D'ÉQUILIBRE

pression verticales  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ . Le PFD en projection sur  $(Oz)$  donne alors  $F_{1z} + F_{2z} - mg = 0$ , soit  $-SP(z_0 + h) + SP(z_0) = Mg$ . Or  $P(z_0 + h) - P(z_0) = -\rho gh$ , d'où :

$$\boxed{Mg = \rho ghS.}$$

### IV L'état gazeux

#### IV.1 Propriétés macroscopiques

On considère un graphe représentant  $PV$  en fonction de  $P$  pour différents gaz à différentes températures. Pour une température  $T_1$  donnée, les courbes correspondant aux différents gaz vont converger vers un même point  $A_1$  lorsque  $P \rightarrow 0$ . Et on a expérimentalement :

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_2}} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Ceci donne une définition de la *température absolue* à un facteur multiplicatif près. Reste à choisir une référence ; on choisit la température du point triple de l'eau :  $T_0 = 273,16$  K.

Le modèle des gaz parfaits correspond à la limite des gaz réels lorsque  $P \rightarrow 0$  ; on étend ce modèle à n'importe quelle pression et on a

$$\boxed{PV = nRT.}$$

#### IV.2 Coefficients thermoélastiques des gaz parfaits

Pour un gaz parfait, comme  $PV = nRT$ , on a :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{nRT}{P} \right) \right)_P = \frac{1}{T}, \\ \beta &= \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{nRT}{V} \right) \right)_V = \frac{1}{T}, \\ \chi_T &= -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{nRT}{P} \right) \right)_T = \frac{1}{P}. \end{aligned}$$

#### IV.3 Théorie cinétique des gaz parfaits

On modélise les molécules d'un gaz par des *points matériels n'interagissant pas entre eux*.

On cherche d'abord à quantifier la force appliquée par une particule lors des chocs avec la paroi isolant le gaz du milieu extérieur. La vitesse des particules avant un choc s'écrit  $\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$ , puis après le choc  $\vec{v}' = -v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$ . On a donc  $\Delta \vec{p} = m(\vec{v}' - \vec{v}) = -2mv_x \vec{u}_x$ . Le PFD donne  $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  ; en appelant  $\tau$  le temps caractéristique de l'interaction, on a donc

$$\vec{f}_{\text{paroi} \rightarrow \text{particule}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\tau} = -\frac{2mv_x}{\tau} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{f}_{\text{particule} \rightarrow \text{paroi}} = \frac{2mv_x}{\tau} \vec{u}_x.$$

## CHAPITRE 18. DESCRIPTION MACROSCOPIQUE D'UN SYSTÈME À L'ÉTAT D'ÉQUILIBRE

On cherche maintenant à déterminer la pression exercée par les particules de vitesse  $\vec{v}_0$  donnée. On note  $n(\vec{v}_0)$  le nombre de telles particules par unité de volume. Parmi ces particules, celles qui frappent l'élément de surface  $dS$  de la paroi pendant une durée  $t_1$  se situent dans un cylindre d'axe  $\vec{v}_0 t_1$  et de base  $dS$ . Le volume du cylindre est donc :  $V = \vec{v}_0 t_1 \cdot d\vec{S} = v_{0x} t_1 dS$ . Le nombre de chocs par unité de temps sur la surface  $dS$  s'écrit donc  $\nu(\vec{v}_0) = \frac{n(\vec{v}_0) \cdot V}{t_1} = n(\vec{v}_0) v_{0x} dS$ . On peut alors en déduire la force totale exercée sur  $dS$  par les particules de vitesse  $\vec{v}_0$  :  $dF = \nu(\vec{v}_0) \cdot t_1 \cdot \vec{f}_{\text{particule} \rightarrow \text{paroi}} = 2n(\vec{v}_0) m v_{0x}^2 dS$ . Ainsi, la pression exercée par les particules de vitesse  $\vec{v}_0$  sur  $dS$  est :

$$P(\vec{v}_0) = 2n(\vec{v}_0) m v_{0x}^2.$$

Reste à sommer les pressions correspondant à chaque vitesse  $\vec{v}_i$  t.q.  $v_{ix} > 0$  (sinon il n'y a pas de choc) pour déterminer la pression totale :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{\substack{i \\ v_{ix} > 0}} P(\vec{v}_i) = \frac{1}{2} \sum_i P(\vec{v}_i) = \sum_i n(\vec{v}_i) m v_{ix}^2 \\ &= \frac{mN}{V} \left( \frac{1}{N} \sum_i n(\vec{v}_i) V v_{ix}^2 \right) = \frac{1}{V} \underbrace{mN}_{nM} \underbrace{\langle v_x^2 \rangle}_{\frac{1}{3} \langle v^2 \rangle}. \end{aligned}$$

**Définition 18.13** (Vitesse quadratique moyenne). *On définit la vitesse quadratique moyenne  $u$  par*

$$u = \sqrt{\langle v^2 \rangle}.$$

On obtient au final :

$$PV = n \frac{Mu^2}{3}.$$

Par identification avec l'expression  $PV = nRT$ , il vient :

$$\boxed{T = \frac{Mu^2}{3R}}.$$

Ceci montre que la température décrit l'agitation des molécules.

### IV.4 Gaz réels

**Loi 18.14** (Loi de Van der Waals). *Pour les gaz réels, on peut modifier la formule  $PV = nRT$  pour prendre en compte les interactions intermoléculaires. On obtient*

$$\left( P + \frac{\alpha}{V^2} \right) (V - \beta) = nRT,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des caractéristiques des gaz.

## V Notion d'énergie interne

### V.1 Rappels de mécanique

L'énergie mécanique d'un système s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \underbrace{\mathcal{E}_{\text{micro}}^c + \mathcal{E}_{\text{micro}}^p}_{\text{énergie interne}} + \mathcal{E}_{\text{macro}}^c + \mathcal{E}_{\text{macro}}^p.$$

## CHAPITRE 18. DESCRIPTION MACROSCOPIQUE D'UN SYSTÈME À L'ÉTAT D'ÉQUILIBRE

---

**Définition 18.15** (Énergie interne). *On définit l'énergie interne par*

$$\mathcal{U} = \mathcal{E}_{\text{micro}}^c + \mathcal{E}_{\text{micro}}^p.$$

*On définit aussi l'énergie interne molaire :  $\mathcal{U}_m = \frac{\mathcal{U}}{n}$ .*

L'énergie interne apparaît comme l'énergie dans un repère lié au système global. En thermodynamique, l'énergie interne peut varier par des échanges autres que le travail.

### V.2 Cas d'un gaz parfait

Pour un *gaz parfait monoatomique*, on peut supposer les molécules ponctuelles et on a  $\mathcal{E}_{\text{micro}}^p = 0$  car on néglige les interactions intermoléculaires. Ainsi :

$$\mathcal{U} = \mathcal{E}_{\text{micro}}^c = \frac{1}{2}m \sum_i v_i^2 = \frac{1}{2}mN \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}mNu^2.$$

Or  $u^2 = \frac{3RT}{M}$  et  $mN = nM$ , d'où :

$$\mathcal{U} = \frac{3}{2}nRT.$$

Pour un *gaz parfait diatomique*, on a :

$$\mathcal{U} = \frac{5}{2}nRT.$$

Dans le cas général, on a  $\mathcal{U} \propto T$ .

**Définition 18.16** (Capacité thermique à volume constant). *La capacité thermique à volume constant  $\mathcal{C}_V$  est définie par*

$$\boxed{\mathcal{U} = \mathcal{C}_V T.}$$

*On définit aussi la capacité thermique molaire à volume constant :  $\mathcal{C}_{MV} = \frac{\mathcal{C}_V}{n}$ .*

On a donc  $\mathcal{C}_{MV} = \frac{3}{2}R$  pour un gaz monoatomique et  $\mathcal{C}_{MV} = \frac{5}{2}R$  pour un gaz diatomique.

### V.3 Cas d'une phase condensée

On considère une *phase condensée* incompressible et indilatable. Dans ces conditions, l'énergie interne ne dépend que de la température, et la capacité thermique  $\mathcal{C}_V$  vérifie :

$$\frac{d\mathcal{U}}{dT} = \mathcal{C}_V.$$

## VI Corps pur

### VI.1 Transitions de phase

On s'intéresse à des phénomènes de *transitions de phase* pour des corps purs. Ces transitions s'accompagnent d'un *transfert de chaleur*  $\mathcal{Q}_P$  entre la substance et le *thermostat* (i.e. le système en équilibre thermique).

**Définition 18.17** (Chaleur latente). *On définit la chaleur latente  $\mathcal{L}$  par*

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{\mathcal{Q}_P}{m}.}$$

## VI.2 Représentation graphique

Pour une substance chimique pure, on peut tracer un *diagramme de phase*. Dans un repère représentant la pression  $P$  en fonction de la température  $T$ , on trace les frontières, appelées *courbes d'équilibre*, séparant les différents états (solide, liquide, gazeux). La courbe d'équilibre liquide-vapeur présente la particularité de s'interrompre en un point appelé *point critique*; il y a donc continuité de l'état gazeux et de l'état liquide lorsque l'on contourne le point critique.

On peut aussi s'intéresser au *diagramme de Clapeyron* : c'est la représentation de la pression  $P$  en fonction du volume massique  $u$  pour différentes températures  $T$ . On observe alors des paliers, i.e. des zones où coexistent deux phases. La courbe en cloche passant par les extrémités de ces paliers est appelée *courbe de saturation*.

**Théorème 18.18** (Théorème des moments). *On choisit un point  $M$  du diagramme de Clapeyron où coexistent deux phases. On note  $x_v = \frac{m_v}{m_v+m_\ell}$  le titre massique de vapeur, et  $x_\ell = \frac{m_\ell}{m_\ell+m_v}$  le titre massique de liquide. On a alors*

$$\boxed{x_v = \frac{u(M) - u_\ell}{u_v - u_\ell} \quad \text{et} \quad x_\ell = \frac{u(M) - u_v}{u_\ell - u_v},}$$

où  $u(M)$ ,  $u_\ell$  et  $u_v$  sont les volumes massifs respectifs en  $M$  et aux extrémités du palier.

Chaque état du corps pur est donc représenté par un point dans un espace à trois dimensions  $(P, V, T)$ . La surface qu'il décrit est dite *surface caractéristique du corps pur*.

## VI.3 États métastables

Certaines transitions de phase se font avec un retard : on parle d'*état métastable*.

Par exemple, si on remplit un tube à essai d'eau et qu'on le plonge dans un mélange de glace et de sel (à  $-10^\circ\text{C}$ ), on voit descendre la température de l'eau en dessous de  $0^\circ\text{C}$  sans observer de changement d'état : lors d'une *surfusion*, l'eau reste liquide en dessous de  $0^\circ\text{C}$  mais, à la moindre perturbation, remonte à sa température classique de changement d'état.

La *chambre à brouillard* est un détecteur de particules dans lequel l'ionisation produite par le passage d'une particule chargée dans un gaz sursaturé provoque la formation de gouttelettes le long de la trajectoire, ce qui permet de la visualiser.

La *chambre à bulles*, qui repose sur le même principe, a aujourd'hui supplanté la chambre à brouillard.

# Chapitre 19

## Premier Principe de la Thermodynamique

### I Échanges d'énergie

#### I.1 Fonctions d'état

**Définition 19.1** (Fonction d'état). *On appelle fonction d'état une grandeur qui s'exprime en fonction des variables macroscopiques caractérisant l'état d'équilibre d'un système thermodynamique. La variation de la fonction d'état entre deux états est bien définie.*

**Notation 19.2.** *On note  $\mathcal{W}$  le travail reçu par le système et  $\mathcal{Q}$  le transfert thermique reçu par le système.*

#### I.2 Énoncé du premier principe

**Loi 19.3** (Premier principe de la thermodynamique). *À tout système est associée une fonction d'état  $\mathcal{U}$  appelée énergie interne, qui est une grandeur extensive. Cette énergie ne dépend que de l'état dans lequel se trouve le système et non de l'énergie cinétique de son mouvement d'ensemble, ni de l'énergie potentielle provenant de sa position dans des champs de force. Dans le cas général, on a :*

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{W} + \mathcal{Q}.$$

*Si le système est globalement fixe, cela donne*

$$\Delta\mathcal{U} = \mathcal{W} + \mathcal{Q}.$$

La variation d'énergie interne entre deux états ne dépend pas du chemin parcouru :  $\Delta\mathcal{U} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{Q}_1 = \mathcal{W}_2 + \mathcal{Q}_2$ .

Pour deux états très proches, on a  $d\mathcal{U} = \delta\mathcal{W} + \delta\mathcal{Q}$ .

En thermodynamique, on étudie les variables  $P, V, T$ . Ces variables étant reliées par une équation d'état  $f(P, V, T) = 0$ , elles ne sont pas indépendantes, donc on choisit deux des trois variables, et on écrit par exemple :

$$d\mathcal{U} = \left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial T}\right)_V dT.$$

### I.3 Travail des forces de pression

On considère un cylindre de section  $S$  contenant un gaz. Le cylindre est fermé par un piston sur lequel s'applique une pression  $P_{\text{ext}}$  et dont on note  $x$  l'altitude. La force appliquée par le piston sur le gaz s'écrit alors  $\vec{F} = -P_{\text{ext}}S\vec{u}_x$ . Pour une petite variation d'altitude  $dx$ , le travail reçu est donc :  $\delta\mathcal{W} = \vec{F} \cdot d\vec{x} = -P_{\text{ext}}S dx$ . En notant  $dV = S dx$ , on a donc :

$$\boxed{\delta\mathcal{W} = -P_{\text{ext}} dV.}$$

On peut généraliser cette relation quelle que soit la forme du système. Lors d'une détente, on remarque que  $dV > 0$  donc  $\delta\mathcal{W} < 0$  : le système fournit du travail. De même, lors d'une compression,  $\delta\mathcal{W} > 0$  : le système reçoit du travail.

Pour une transformation quasi-statique, le système est en équilibre à tout instant donc  $P = P_{\text{ext}}$ , d'où  $\delta\mathcal{W} = -P dV$ .

Pour une transformation monobare,  $P_{\text{ext}} = \text{constante}$ , donc  $\mathcal{W} = -P_{\text{ext}}\Delta V$ .

En intégrant la relation obtenue, on a :

$$\mathcal{W}_{1 \rightarrow 2} = - \int_1^2 P dV.$$

Le travail est donc exactement l'aire sous la courbe entre deux états 1 et 2 dans un *diagramme de Clapeyron* (i.e. la représentation de  $P$  en fonction de  $V$ ).

## II Enthalpie

### II.1 Définition

**Définition 19.4** (Enthalpie). *L'enthalpie est une fonction d'état notée  $H$  et définie par*

$$\boxed{H = \mathcal{U} + PV.}$$

*C'est une variable extensive.*

On considère une transformation d'un état initial  $(P, V)$  à un état final  $(P+dP, V+dV)$ . On suppose la transformation quasi-statique. On a  $dH = d\mathcal{U} + d(PV) = \delta\mathcal{W} + \delta\mathcal{Q} + P dV + V dP = -P dV + \delta\mathcal{Q} + P dV + V dP$ . On obtient donc :

$$\boxed{dH = \delta\mathcal{Q} + V dP.}$$

En particulier, pour une transformation isobare,  $dH = \delta\mathcal{Q}$ .

### II.2 Capacité thermique à pression constante

**Définition 19.5** (Capacité thermique à volume constant). *La capacité thermique à volume constant  $\mathcal{C}_V$  est définie par*

$$\boxed{\mathcal{U} = \mathcal{C}_V T.}$$

*On définit aussi la capacité thermique molaire à volume constant :  $\mathcal{C}_{MV} = \frac{\mathcal{C}_V}{n}$ .*



**Définition 19.6** (Capacité thermique à pression constante). *On définit la capacité thermique à pression constante  $\mathcal{C}_P$  par*

$$\mathcal{C}_P = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P.$$

*On définit de plus la capacité thermique molaire à pression constante par*

$$\mathcal{C}_{MP} = \frac{\mathcal{C}_P}{n}.$$

Pour un gaz parfait, on a  $\frac{d\mathcal{U}}{dT} = n\mathcal{C}_{MV}$ , donc

$$d\mathcal{U} = n\mathcal{C}_{MV} dT.$$

On en déduit la loi de Joule :

**Loi 19.7** (Loi de Joule). *L'énergie interne  $\mathcal{U}$  d'un gaz parfait ne dépend que de la température  $T$ .*

De plus  $dH = d\mathcal{U} + d(PV) = n\mathcal{C}_{MV} dT + d(nRT) = n(\mathcal{C}_{MV} + R) dT = n\mathcal{C}_{MP} dT$ . Par identification :

$$\mathcal{C}_{MP} = \mathcal{C}_{MV} + R.$$

Donc  $\mathcal{C}_{MP} = \frac{5}{2}R$  pour un gaz parfait monoatomique et  $\mathcal{C}_{MP} = \frac{7}{2}R$  pour un gaz parfait diatomique.

Pour les liquides et les solides, on donne généralement la capacité thermique à pression constante  $\mathcal{C}_P$  car il est impossible de mesurer la capacité thermique à volume constant (on n'a pas d'enveloppe suffisamment rigide pour éviter la dilatation).

### III Transformations d'un gaz parfait

On considère des *transformations quasi-statiques* d'un gaz parfait. On étudie les variations élémentaires de  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{Q}$  et  $H$  en fonction des variables  $P, V, T$ .

**Notation 19.8.** *On notera  $\gamma = \frac{\mathcal{C}_{MP}}{\mathcal{C}_{MV}}$ .*

On a donc

$$\mathcal{C}_{MP} = \gamma \frac{R}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{MV} = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

#### III.1 Variables $T$ et $V$

- (i)  $d\mathcal{U} = n\mathcal{C}_{MV} dT$ ,
- (ii)  $\delta\mathcal{W} = -P dV = -\frac{nRT}{V} dV$ ,
- (iii)  $\delta\mathcal{Q} = d\mathcal{U} - \delta\mathcal{W} = n\mathcal{C}_{MV} dT + \frac{nRT}{V} dV$ ,
- (iv)  $dH = n\mathcal{C}_{MP} dT$ .

### III.2 Variables $T$ et $P$

- (i)  $d\mathcal{U} = n\mathcal{C}_{MV} dT$ ,
- (ii)  $\delta\mathcal{W} = -P dV = -P d\left(\frac{nRT}{P}\right) = -nR dT + \frac{nRT}{P} dP$ ,
- (iii)  $\delta\mathcal{Q} = d\mathcal{U} - \delta\mathcal{W} = n\mathcal{C}_{MV} dT + nR dT - \frac{nRT}{P} dP = n\mathcal{C}_{MP} dT - \frac{nRT}{P} dP$ ,
- (iv)  $dH = n\mathcal{C}_{MP} dT$ .

### III.3 Variables $P$ et $V$

- (i)  $d\mathcal{U} = n\mathcal{C}_{MV} dT = n\mathcal{C}_{MV} d\left(\frac{PV}{nR}\right) = \frac{\mathcal{C}_{MV}}{R} d(PV) = \frac{d(PV)}{\gamma-1}$ ,
- (ii)  $\delta\mathcal{W} = -P dV$ ,
- (iii)  $\delta\mathcal{Q} = d\mathcal{U} - \delta\mathcal{W} = \frac{d(PV)}{\gamma-1} + P dV = \frac{V dP + \gamma P dV}{\gamma-1}$ .

## IV Quelques transformations

### IV.1 Détente de Joule-Gay-Lussac

On considère deux cylindres isolés du milieu extérieur par une paroi calorifugée et reliés par un conduit initialement fermé par un robinet. On place un gaz dans le premier cylindre, le deuxième étant vide. On ouvre le robinet, le gaz se répartit dans les deux cylindres. La transformation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adiabatique}} \begin{pmatrix} P_2 \\ V_2 \end{pmatrix},$$

avec  $V_2 > V_1$ ,  $P_2 < P_1$ .

On a  $\Delta\mathcal{U} = \mathcal{W} + \mathcal{Q}$ , avec  $\mathcal{W} = \mathcal{Q} = 0$ , donc

$$\Delta\mathcal{U} = 0.$$

C'est donc une *transformation à énergie interne constante*. Dans le cas d'un gaz parfait,  $\mathcal{U}$  ne dépend que de  $T$ , donc il vient

$$\Delta T = 0.$$

Dans ce cas, c'est une *transformation isotherme*.

Pour les gaz réels, on observe une légère diminution de la température ; cette diminution est d'autant plus faible que la pression initiale est faible.

### IV.2 Détente de Joule-Thomson

On considère un conduit au milieu duquel se trouve une paroi poreuse. À gauche de la paroi poreuse, le gaz est dans l'état  $(P_1, T_1)$  ; à droite, il est dans l'état  $(P_2, T_2)$ . On s'intéresse à une quantité de gaz fixée, se trouvant dans un rectangle  $(ABCD)$  à l'instant  $t$  puis dans un rectangle  $(A'B'C'D')$  à l'instant  $t'$ .

On a  $\mathcal{U}_{t'} - \mathcal{U}_t = \mathcal{W} + \mathcal{Q}$ . Or  $\mathcal{Q} = 0$  et  $\mathcal{W} = P_1 V_{AA'B'B} - P_2 V_{CC'D'D}$ . De plus,  $\mathcal{U}$  est une grandeur extensive, donc on peut écrire :

$$\mathcal{U}_{t'} - \mathcal{U}_t = \mathcal{U}_{CC'D'D}(t') + \underbrace{\mathcal{U}_{A'DCB'}(t') - \mathcal{U}_{A'DCB'}(t)}_0 - \mathcal{U}_{AA'B'B}(t).$$

Ainsi  $\mathcal{U}_{CC'D'D} - \mathcal{U}_{AA'B'B} = P_1 V_{AA'B'B} - P_2 V_{CC'D'D}$ , d'où :

$$\Delta H = 0.$$

La détente de Joule-Thomson est donc une *transformation isenthalpique* (à enthalpie constante). Pour un gaz parfait, on a de plus  $\Delta H = nC_{MP}\Delta T$ , d'où

$$\Delta T = 0.$$

### IV.3 Transformation quasi-statique isotherme d'un gaz parfait

On considère un cylindre contenant un gaz et fermé par un piston. On étudie la transformation consistant à tirer sur le piston :

$$\left( \begin{array}{c} P_1 \\ V_1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{isotherme}]{\text{quasi-statique}} \left( \begin{array}{c} P_2 \\ V_2 \end{array} \right).$$

On suppose que le gaz est parfait :  $PV = nRT$ . Comme la transformation est quasi-statique,  $P, V, T$  sont définis à chaque instant et  $P = P_{\text{ext}}$ , donc :  $\delta\mathcal{W} = -P dV = -\frac{nRT_0}{V} dV$ , donc :

$$\mathcal{W} = - \int_{V_1}^{V_2} nRT_0 \frac{dV}{V} = nRT_0 \ln \frac{V_1}{V_2} = nRT_0 \ln \frac{P_2}{P_1}.$$

De plus, la transformation est isotherme donc  $\Delta\mathcal{U} = 0$ , d'où

$$\mathcal{Q} = -\mathcal{W} = nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT_0 \ln \frac{P_1}{P_2}.$$

### IV.4 Transformation quasi-statique adiabatique d'un gaz parfait

On considère la transformation suivante :

$$\left( \begin{array}{c} P_1 \\ V_1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{adiabatique}]{\text{quasi-statique}} \left( \begin{array}{c} P_2 \\ V_2 \end{array} \right).$$

On a  $\delta\mathcal{Q} = 0$  car la transformation est adiabatique. Or, le gaz étant supposé parfait,  $\delta\mathcal{Q} = \frac{V dP + \gamma P dV}{\gamma - 1}$ . Donc  $\gamma P dV + V dP = 0$ , d'où  $\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$ . On obtient ainsi  $\gamma \ln V + \ln P = \text{constante}$ , i.e.  $\ln(PV^\gamma) = \text{constante}$  d'où on déduit l'équation de Laplace :

**Formule 19.9** (Équation de Laplace).

$$\boxed{PV^\gamma = \text{constante} .}$$

## Second Principe de la Thermodynamique

### I Évolution spontanée d'un système

#### I.1 Rappels de mécanique

L'équation d'un oscillateur mécanique amorti s'écrit  $m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$ . Ce système n'est pas *réversible*. Cela vient du fait que le terme d'amortissement change lorsqu'on remplace  $t$  pas  $-t$ . En effet,  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{d(-t)^2}$  mais  $\frac{dx}{dt} \neq \frac{dx}{d(-t)}$ .

#### I.2 Réversibilité d'une transformation

Les transformations réelles spontanées d'un système isolé ont un sens d'évolution qui correspond au *sens d'écoulement du temps*. De telles transformations sont *irréversibles*. Cependant, si la durée d'observation est très inférieure au temps caractéristique d'amortissement, il est impossible de mettre en évidence cet amortissement.

**Vocabulaire 20.1** (Transformations réversibles ou irréversibles).

- (i) Une transformation réversible est une transformation qui se fait par succession d'états d'équilibre infiniment voisins, la condition d'équilibre concernant aussi bien le système étudié que le milieu extérieur avec lequel il interagit.
- (ii) Une transformation est irréversible lorsque la transformation inverse ne peut pas être réalisée.

### II Entropie

#### II.1 Énoncé du second principe

**Loi 20.2** (Second principe de la thermodynamique). *À tout système est associée une fonction d'état  $S$  appelée entropie, qui est une grandeur extensive. L'entropie d'un système isolé évoluant de manière irréversible augmente jusqu'à l'établissement d'un état d'équilibre. Si l'évolution est réversible, l'entropie du système reste constante.*

La variation d'entropie entre deux états ne dépend pas du chemin parcouru.

Pour un système isolé, on a  $\Delta S \geq 0$ .

## II.2 Identité thermodynamique

Puisque les trois variables  $P, V, T$  sont reliées par une équation d'état, deux variables suffisent pour décrire l'état d'un système. On peut choisir par exemple  $S$  et  $V$ . On a ainsi

$$d\mathcal{U} = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial V}\right)_S dV.$$

**Formule 20.3** (Identité thermodynamique).

$$\boxed{d\mathcal{U} = T dS - P dV.}$$

**Remarque 20.4.** On peut aussi écrire  $dS = \frac{1}{T} (d\mathcal{U} + P dV)$ .

On en déduit ainsi :

$$T = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial S}\right)_V \quad \text{et} \quad P = -\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial V}\right)_S.$$

En particulier, pour une *transformation réversible*, on a  $-P dV = \delta\mathcal{W}$  et  $d\mathcal{U} = 0$  donc  $T dS = -\delta\mathcal{W} = \delta\mathcal{Q}_{\text{rev}}$ .

On considère par exemple un système constitué de deux compartiments  $A, B$  séparés par une paroi diatherme (qui permet les échanges de chaleur) mobile et isolés du milieu extérieur par une paroi adiabatique. On a  $d\mathcal{U} = d\mathcal{U}_A + d\mathcal{U}_B = 0$  et  $dV_A + dV_B = 0$ . On a de plus  $dS_{A/B} = \frac{1}{T_{A/B}} d\mathcal{U}_{A/B} + \frac{P_{A/B}}{T_{A/B}} dV_{A/B}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} dS &= dS_A + dS_B \\ &= \left(\frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A}\right) d\mathcal{U}_B + \left(\frac{P_B}{T_B} - \frac{P_A}{T_A}\right) dV_B. \end{aligned}$$

À l'équilibre,  $T_A = T_B$  et  $P_A = P_B$  donc  $dS = 0$ . Si  $T_A = T_B$  mais  $P_A > P_B$  alors  $dS = (P_B - P_A) \frac{dV_B}{T_B} > 0$ ; or  $P_B - P_A < 0$  donc  $dV_B < 0$ , ce qui est conforme au bon sens : le compartiment  $B$  est en sous-pression donc son volume diminue.

## II.3 Cas de transformations réversibles

On considère :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U} \\ V \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{réversible}} \begin{pmatrix} \mathcal{U} + d\mathcal{U} \\ V + dV \end{pmatrix}.$$

On a  $d\mathcal{U} = \delta\mathcal{W} + \delta\mathcal{Q}_{\text{rev}} = -P dV + T dS$ . Par identification, comme  $\delta\mathcal{W} = -P dV$  :

$$\boxed{dS = \frac{\delta\mathcal{Q}_{\text{rev}}}{T}.}$$

En particulier, pour une transformation adiabatique réversible,  $\delta\mathcal{Q}_{\text{rev}} = 0$  d'où  $dS = 0$  donc l'entropie est constante. On parle de *transformation isentropique*.

Par ailleurs, l'expression  $dS = \frac{\delta\mathcal{Q}_{\text{rev}}}{T}$  met en évidence que l'entropie, pour une transformation réversible, ne dépend pas directement du travail reçu par le système.

## II.4 Échanges avec un thermostat

**Vocabulaire 20.5** (Thermostat). *On appelle thermostat (ou source de chaleur) tout système isochore pouvant échanger de la chaleur avec l'extérieur à température constante.*

Pour un thermostat à température  $T_0$ , on a  $d\mathcal{U}_{\text{source}} = T_0 dS_{\text{source}} = \delta Q_{\text{source}}^{\text{reçu}} = -\delta Q_{\text{système}}^{\text{reçu}} = -\delta Q$ . Ainsi  $dS_{\text{source}} = -\frac{\delta Q}{T_0}$ . Or  $dS_{\text{source}} + dS_{\text{système}} \geq 0$ , donc  $dS = dS_{\text{système}} \geq -dS_{\text{source}}$ . Ainsi :

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T_0}.$$

On peut écrire  $dS = \delta S_{\text{échangée}} + \delta S_{\text{créée}} \geq 0$ . Or  $\delta S_{\text{échangée}} = -dS_{\text{source}} = \frac{\delta Q}{T_0}$ , d'où  $\delta S_{\text{créée}} \geq 0$ , avec égalité ssi la transformation est réversible.

Plus généralement, pour un système fermé en contact thermique avec un autre système de température  $T_e$  variable (le milieu extérieur), on peut écrire :

$$\boxed{\Delta S = S_{\text{échangée}} + S_{\text{créée}},}$$

où

$$\boxed{S_{\text{échangée}} = \int \frac{\delta Q}{T_e},}$$

et  $S_{\text{créée}} \geq 0$  avec égalité ssi la transformation est réversible.

## III Cas du gaz parfait

### III.1 Transformation isotherme réversible

On considère

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ V_1 \\ T_0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{isotherme}]{\text{réversible}} \begin{pmatrix} P_2 \\ V_2 \\ T_0 \end{pmatrix}.$$

Le gaz étant supposé parfait et la température constante, on a  $d\mathcal{U} = \delta W + \delta Q_{\text{rev}} = 0$  à tout instant. De plus, la transformation est réversible donc quasi-statique donc  $\delta Q_{\text{rev}} = -\delta W = P dV$ . On en déduit  $dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T_0} = \frac{P dV}{T_0} = \frac{nRT_0}{VT_0} dV = nR \frac{dV}{V}$ . Ainsi :

$$\Delta S = nR \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right).$$

### III.2 Transformation isobare réversible

On considère

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ T_1 \\ P_0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{isobare}]{\text{réversible}} \begin{pmatrix} V_2 \\ T_2 \\ P_0 \end{pmatrix}.$$

On a ici  $dH = \delta Q_{\text{rev}} = nC_{MP} dT$ , donc  $dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = nC_{MP} \frac{dT}{T}$ . Ainsi :

$$\Delta S = nC_{MP} \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right).$$

### III.3 Transformation isochore réversible

On considère

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ T_1 \\ V_0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{isochore}]{\text{réversible}} \begin{pmatrix} P_2 \\ T_2 \\ V_0 \end{pmatrix}.$$

On a  $\delta W = 0$  donc  $dU = \delta Q_{\text{rev}} = nC_{MV} dT$  et  $dS = nC_{MV} \frac{dT}{T}$ . Ainsi :

$$\Delta S = nC_{MV} \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right).$$

### III.4 Transformation réversible quelconque

On peut raisonner de même pour n'importe quelle transformation réversible :

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ V_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{réversible}} \begin{pmatrix} P_2 \\ V_2 \\ T_2 \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse d'abord aux variables  $T$  et  $V$ . On a  $dU = nC_{MV} dT$  et  $\delta W = -P dV = -nRT \frac{dV}{V}$ . Ainsi  $\delta Q_{\text{rev}} = dU - \delta W = nC_{MV} dT + nRT \frac{dV}{V}$ . D'où  $dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = nC_{MV} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$ . On obtient ainsi :

$$\Delta S = nC_{MV} \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + nR \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right).$$

Pour déterminer l'expression de  $\Delta S$  en fonction de  $T$  et  $P$ , on écrit :

$$\begin{aligned} \Delta S &= nC_{MV} \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + nR \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{P_1}{P_2} \right) \\ &= nC_{MP} \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - nR \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right). \end{aligned}$$

### III.5 Transformation quelconque

Comme  $S$  est une fonction d'état,  $\Delta S$  ne dépend pas du type de transformation, mais seulement de l'état final et de l'état initial. Ainsi, les expressions trouvées précédemment restent valables pour une transformation irréversible.

**Définition 20.6** (Entropie d'un gaz parfait). *On définit :*

$$\boxed{S_{GP}(T, V) = nC_{MV} \ln T + nR \ln V,} \quad (\text{i})$$

$$\boxed{S_{GP}(T, P) = nC_{MP} \ln T - nR \ln P.} \quad (\text{ii})$$

On a ainsi

$$\Delta S = S_{GP}(T_2, V_2) - S_{GP}(T_1, V_1) = S_{GP}(T_2, P_2) - S_{GP}(T_1, P_1).$$

## IV Bilans entropiques

### IV.1 Détente de Joule-Gay-Lussac

On considère :

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ V_1 \\ T_0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{adiabatique}]{\text{irréversible}} \begin{pmatrix} P_2 \\ V_2 \\ T_0 \end{pmatrix},$$

où  $V_2 > V_1$ . Comme la transformation est adiabatique,  $S_{\text{échangée}} = 0$ . Donc  $S_{\text{créée}} = \Delta S = nR \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) > 0$ .

Si on suppose que le gaz se détend lentement en contact avec un thermostat, la transformation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ V_1 \\ T_0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{isotherme}]{\text{réversible}} \begin{pmatrix} P_2 \\ V_2 \\ T_0 \end{pmatrix}.$$

$S$  étant une fonction d'état, on a toujours  $\Delta S = nR \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)$ . Mais  $S_{\text{échangée}} = \int \frac{\delta Q}{T_0} = \Delta S$ , donc  $S_{\text{créée}} = 0$ .

Cet exemple met en évidence le fait que  $S_{\text{échangée}}$  et  $S_{\text{créée}}$ , contrairement à  $\Delta S$ , dépendent du type de transformation.

### IV.2 Entropie de mélange

On considère deux gaz parfaits  $A$  et  $B$  initialement séparés et isolés du milieu extérieur par une paroi adiabatique. La transformation s'écrit

$$\begin{pmatrix} V_A \\ P_0 \\ T_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V_B \\ P_0 \\ T_0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{adiabatique}]{\text{irréversible}} \begin{pmatrix} V_A + V_B \\ P_f \\ T_f \end{pmatrix}.$$

On a  $\Delta \mathcal{U} = \Delta \mathcal{U}_A + \Delta \mathcal{U}_B = 0$ . Or  $\Delta \mathcal{U}_{A/B} = n_{A/B} \mathcal{C}_{MV A/B} (T_f - T_0)$ , donc  $n_A \mathcal{C}_{MV A} (T_f - T_0) + n_B \mathcal{C}_{MV B} (T_f - T_0) = 0$ . Ainsi  $T_f = T_0$ .

En outre,  $n_A + n_B = \frac{P_f(V_A + V_B)}{RT_0} = \frac{P_0 V_A}{RT_0} + \frac{P_0 V_B}{RT_0}$ . Donc  $P_f = P_0$ .

Notons de plus que  $\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B$ . Pour déterminer  $\Delta S_{A/B}$ , on s'intéresse séparément aux gaz  $A$  et  $B$  (il est donc essentiel que les gaz  $A$  et  $B$  soient différents). On a  $\Delta S_{A/B} = n_{A/B} R \ln \left( \frac{V_A + V_B}{V_{A/B}} \right)$ . Il vient ainsi

$$\Delta S = n_A R \ln \left( \frac{V_A + V_B}{V_A} \right) + n_B R \ln \left( \frac{V_A + V_B}{V_B} \right) > 0.$$

Comme la transformation est adiabatique,  $S_{\text{échangée}} = 0$  donc  $S_{\text{créée}} = \Delta S > 0$ .

**Remarque 20.7.** Ceci ne s'applique que si les gaz  $A$  et  $B$  sont différents. Ce phénomène est appelé paradoxe de Gibbs.



### IV.3 Transfert thermique

On considère deux solides  $A$  et  $B$  mis en contact thermique :

$$(T_A), (T_B) \xrightarrow[\text{adiabatique}]{\text{irréversible}} (T_f), (T_f).$$

On suppose que capacité thermique de  $A =$  capacité thermique de  $B = C$ . On a  $\Delta H = C(T_f - T_A) + C(T_f - T_B) = 0$ , donc  $T_f = \frac{T_A + T_B}{2}$ .

Si on s'intéresse au sous-système  $A/B$ , on a la transformation

$$(T_{A/B}) \xrightarrow[\text{isobare}]{\text{réversible}} (T_f).$$

On a alors  $\delta Q_{\text{rev}} = dH = C dT$ . Donc  $dS_{A/B} = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = C \frac{dT}{T}$  et  $\Delta S_{A/B} = C \ln \left( \frac{T_f}{T_{A/B}} \right)$ .  
Ainsi :

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_A + \Delta S_B = C \ln \left( \frac{T_f}{T_A} \right) + C \ln \left( \frac{T_f}{T_B} \right) \\ &= C \ln \left( \frac{T_f^2}{T_A T_B} \right) = C \ln \left( \frac{(T_A + T_B)^2}{4T_A T_B} \right) \\ &= C \ln \left( 1 + \frac{(T_A - T_B)^2}{4T_A T_B} \right). \end{aligned}$$

On a  $\Delta S \geq 0$  avec égalité ssi  $T_A = T_B$ . Ici  $S_{\text{échangée}} = 0$  donc  $S_{\text{créée}} = \Delta S \geq 0$ .

# Chapitre 21

## Machines Thermiques

### I Transformations cycliques d'un système

#### I.1 Cas d'une seule source de chaleur

On considère une *transformation cyclique* avec une seule *source de chaleur* à la température  $T_0$ . On note  $\mathcal{Q}$  le transfert thermique reçu par le système de la part de la source de chaleur. Puisque l'énergie interne et l'entropie sont des fonctions d'état, on a :

$$\Delta\mathcal{U}_{\text{cycle}} = \mathcal{W} + \mathcal{Q} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S_{\text{cycle}} = S_{\text{échangée}} + S_{\text{créée}} = 0.$$

Ainsi  $\frac{\mathcal{Q}}{T_0} = S_{\text{échangée}} = -S_{\text{créée}} \leq 0$ , d'où  $\mathcal{Q} \leq 0$  et  $\mathcal{W} \geq 0$ .

Il n'existe donc pas de moteur fonctionnant de manière cyclique qui produise du travail à partir d'une seule source de chaleur.

#### I.2 Cas de deux sources de chaleur

On considère toujours une *transformation cyclique* avec cette fois *deux sources de chaleur*  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  de températures respectives  $T_1$  et  $T_2$ . On suppose  $T_1 > T_2$ , et on dit alors que  $\Sigma_1$  est la *source chaude* et  $\Sigma_2$  la *source froide*. On a alors :

$$\Delta\mathcal{U}_{\text{cycle}} = \mathcal{W} + \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S_{\text{cycle}} = S_{\text{échangée},1} + S_{\text{échangée},2} + S_{\text{créée}} = 0.$$

Or  $S_{\text{échangée},1} = \frac{\mathcal{Q}_1}{T_1}$  et  $S_{\text{échangée},2} = \frac{\mathcal{Q}_2}{T_2}$ , d'où, comme  $S_{\text{créée}} \geq 0$  :

$$\frac{\mathcal{Q}_1}{T_1} + \frac{\mathcal{Q}_2}{T_2} \leq 0.$$

On étudie les différents cas possibles :

- (i) Les cas  $\mathcal{W} < 0$ ,  $\mathcal{Q}_1 < 0$ ,  $\mathcal{Q}_2 < 0$  et  $\mathcal{W} > 0$ ,  $\mathcal{Q}_1 > 0$ ,  $\mathcal{Q}_2 > 0$  sont impossibles à cause du premier principe.
- (ii) Le cas  $\mathcal{W} < 0$ ,  $\mathcal{Q}_1 > 0$ ,  $\mathcal{Q}_2 > 0$  est impossible à cause du second principe.
- (iii) Le cas  $\mathcal{W} < 0$ ,  $\mathcal{Q}_1 < 0$ ,  $\mathcal{Q}_2 > 0$  est impossible car sinon on aurait  $-\frac{|\mathcal{Q}_1|}{T_1} + \frac{|\mathcal{Q}_2|}{T_2} \leq 0$ , donc  $|\mathcal{Q}_1| \geq \frac{T_1}{T_2} |\mathcal{Q}_2| > |\mathcal{Q}_2|$ , d'où  $\mathcal{W} = |\mathcal{Q}_1| - |\mathcal{Q}_2| > 0$ .

- (iv) Le cas  $\mathcal{W} > 0$ ,  $\mathcal{Q}_1 < 0$ ,  $\mathcal{Q}_2 > 0$  correspond à une *machine frigorifique* ou à une *pompe à chaleur*.
- (v) Le cas  $\mathcal{W} < 0$ ,  $\mathcal{Q}_1 > 0$ ,  $\mathcal{Q}_2 < 0$  correspond à un *moteur*.
- (vi) Les deux derniers cas sont possibles mais sans intérêt.

### I.3 Représentation graphique de $\mathcal{W}$ et $\mathcal{Q}$ pour des transformations quasi-statiques

Comme  $\delta\mathcal{W} = -P dV$ , le travail correspond à l'*aire* dans une *représentation de  $P$  en fonction de  $V$* . Pour une transformation cyclique, ce diagramme est une courbe fermée.

- (i) Si la courbe tourne dans le sens trigonométrique ( $\odot$ ), alors  $\mathcal{W} > 0$ .
- (ii) Sinon ( $\ominus$ ),  $\mathcal{W} < 0$ .

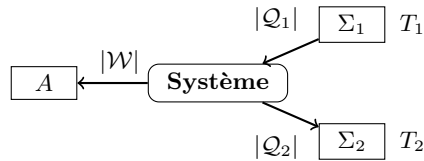
Comme  $\delta\mathcal{Q} = T dS$ , le transfert thermique correspond à l'*aire* dans une *représentation de  $T$  en fonction de  $S$* . Pour une transformation cyclique, ce diagramme est une courbe fermée.

- (i) Si la courbe tourne dans le sens trigonométrique ( $\odot$ ), alors  $\mathcal{Q} < 0$ .
- (ii) Sinon ( $\ominus$ ),  $\mathcal{Q} > 0$ .

## II Moteur

### II.1 Principe

Le *moteur* est un système cyclique qui peut être décrit par le schéma suivant, où  $\Sigma_1$  est une source chaude,  $\Sigma_2$  une source froide (donc  $T_1 > T_2$ ), et  $A$  est un système mécanique ne pouvant échanger que du travail :



**Définition 21.1** (Rendement). *Dans le cas général, le rendement est défini par*

$$r = \frac{\text{gain}}{\text{dépense}}.$$

Pour un moteur, on a  $r = \frac{|\mathcal{W}|}{|\mathcal{Q}_1|}$ .

### II.2 Théorème de Carnot

Pour n'importe quelle transformation cyclique avec deux sources de chaleur, on a  $\mathcal{W} + \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 = 0$  et  $\frac{\mathcal{Q}_1}{T_1} + \frac{\mathcal{Q}_2}{T_2} \leq 0$ . Ainsi,  $r = -\frac{\mathcal{W}}{\mathcal{Q}_1} = 1 + \frac{\mathcal{Q}_2}{\mathcal{Q}_1}$ , et  $\frac{\mathcal{Q}_1}{T_1} \leq -\frac{\mathcal{Q}_2}{T_2}$ , soit  $\frac{\mathcal{Q}_2}{\mathcal{Q}_1} \leq -\frac{T_2}{T_1}$ . On en déduit le théorème de Carnot :

**Théorème 21.2** (Théorème de Carnot). *Pour un moteur, on a :*

$$r \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

En particulier, le rendement d'un *moteur ditherme* est toujours inférieur ou égal au rendement d'un moteur réversible fonctionnant entre les deux mêmes sources. Pour un moteur réversible, le rendement ne dépend que de la température des sources.

### II.3 Exemple du cycle de Carnot

On considère le cycle  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  décrit ci-dessous :

- (i)  $A \rightarrow B$  : détente adiabatique réversible,
- (ii)  $B \rightarrow C$  : compression isotherme réversible à la température  $T_2$ ,
- (iii)  $C \rightarrow D$  : compression adiabatique réversible,
- (iv)  $D \rightarrow A$  : détente isotherme réversible à la température  $T_1$ .

Déterminons  $r = -\frac{\mathcal{W}}{\mathcal{Q}_{D \rightarrow A}}$ . On a  $\mathcal{Q}_{A \rightarrow B} = 0$ ,  $\mathcal{Q}_{C \rightarrow D} = 0$ , donc  $\mathcal{W}_{A \rightarrow B} = \Delta\mathcal{U}_{A \rightarrow B} = nC_{MV}(T_2 - T_1)$ ,  $\mathcal{W}_{C \rightarrow D} = \Delta\mathcal{U}_{C \rightarrow D} = nC_{MV}(T_1 - T_2)$ . De plus,  $\mathcal{W}_{B \rightarrow C} = -\int_{V_B}^{V_C} \frac{nRT_2}{V} dV$  et  $\mathcal{W}_{D \rightarrow A} = -\int_{V_D}^{V_A} \frac{nRT_1}{V} dV$ . Ainsi

$$\mathcal{W} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_C}\right) + nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_A}\right).$$

Pour une transformation adiabatique réversible, la loi de Laplace fournit  $PV^\gamma = \text{constante}$  donc  $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$ . Ainsi  $T_1V_A^{\gamma-1} = T_2V_B^{\gamma-1}$  et  $T_1V_D^{\gamma-1} = T_2V_C^{\gamma-1}$ , d'où  $\frac{V_C}{V_B} = \frac{V_D}{V_A}$ . Donc :

$$\mathcal{W} = nR(T_1 - T_2) \ln\left(\frac{V_D}{V_A}\right).$$

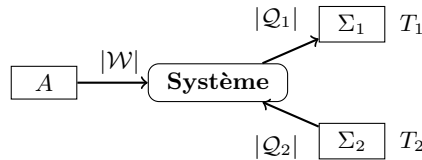
Et on a  $\mathcal{Q}_{D \rightarrow A} = -\mathcal{W}_{D \rightarrow A} = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_A}\right)$ . On obtient au final :

$$r = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

## III Machine frigorifique et pompe à chaleur

### III.1 Principe

La *machine frigorifique* et la *pompe à chaleur* sont des systèmes cycliques qui peuvent être décrits par le schéma suivant, où  $\Sigma_1$  est une source chaude,  $\Sigma_2$  une source froide (donc  $T_1 > T_2$ ), et  $A$  est un système mécanique ne pouvant échanger que du travail :



### III.2 Efficacité

**Définition 21.3** (Efficacité). *Dans le cas général, l'efficacité est définie par*

$$e = \frac{\text{gain}}{\text{dépense}}.$$

Pour une *machine frigorifique*,  $e_F = \frac{|\mathcal{Q}_2|}{|\mathcal{W}|} = \frac{\mathcal{Q}_2}{\mathcal{W}}$ . En écrivant  $\mathcal{W} = -\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2$ , on a  $e_F = -\frac{1}{1+\frac{\mathcal{Q}_1}{\mathcal{Q}_2}}$ . Or  $\frac{\mathcal{Q}_1}{T_1} + \frac{\mathcal{Q}_2}{T_2} \leq 0$ , d'où  $\frac{\mathcal{Q}_1}{\mathcal{Q}_2} \leq -\frac{T_1}{T_2}$ , donc :

$$e_F \leq \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

Pour une *pompe à chaleur*,  $e_P = \frac{|\mathcal{Q}_1|}{|\mathcal{W}|} = -\frac{\mathcal{Q}_1}{\mathcal{W}}$ . En écrivant  $\mathcal{W} = -\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2$ , on a  $e_P = \frac{1}{1+\frac{\mathcal{Q}_2}{\mathcal{Q}_1}}$ . Or  $\frac{\mathcal{Q}_1}{T_1} + \frac{\mathcal{Q}_2}{T_2} \leq 0$ , d'où  $\frac{\mathcal{Q}_2}{\mathcal{Q}_1} \geq -\frac{T_2}{T_1}$ , donc :

$$e_P \leq \frac{T_1}{T_1 - T_2}.$$

## IV Applications

### IV.1 Machines thermiques avec écoulement fluide

Dans les machines thermiques étudiées précédemment, on a pu raisonner sur des systèmes assimilés à des systèmes fermés. Or, dans la thermodynamique industrielle, la plupart des machines fonctionnent avec un *écoulement de fluide*. On doit donc utiliser le même raisonnement que pour la détente de Joule-Thomson et se ramener à un *système fermé*.

On considère donc un système ouvert  $\Sigma$ , avec une arrivée et une sortie de fluide. On se place en régime stationnaire. On considère un système fermé  $\Sigma^*$  constitué de  $\Sigma$  auquel on ajoute une quantité de fluide qui entre puis sort après une durée  $dt$ . Un bilan de masse montre que la masse de fluide entrante est égale à la masse sortante ; on la note  $dm$ .

Le bilan de travail s'écrit  $\delta\mathcal{W} = \delta\mathcal{W}_{\text{amont}} + \delta\mathcal{W}_{\text{aval}} + \delta\mathcal{W}'$ , où  $\mathcal{W}'$  est le travail échangé avec les parties mobiles (turbines, etc.).

Le premier principe appliqué à  $\Sigma^*$  donne  $d\mathcal{U}^* + d\mathcal{E}_c^* + d\mathcal{E}_p^* = \delta\mathcal{Q} + \delta\mathcal{W}$ .

En écrivant cette relation en fonction des énergies massiques et du volume massique, on obtient :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = q + w',$$

où  $h$ ,  $e_c$ ,  $e_p$ ,  $q$  et  $w'$  sont l'enthalpie massique, l'énergie cinétique massique, l'énergie potentielle massique, le transfert thermique massique, et le travail massique échangé avec les parties mobiles.

### IV.2 Cycle de Beau de Rochas

On s'intéresse au fonctionnement d'un *moteur à explosion*. Le cycle étudié est décrit ci-dessous :

- (i)  $A \rightarrow B$  : Admission ; le système est ouvert.
- (ii)  $B \rightarrow C$  : Compression adiabatique réversible pour le système fermé.
- (iii)  $C \rightarrow D$  : La pression passe brusquement de  $P_C$  à  $P_D$  et le volume reste constant.
- (iv)  $D \rightarrow E$  : Détente adiabatique réversible pour le système fermé.
- (v)  $E \rightarrow A$  : Échappement ; le système est ouvert.

Calculons le rendement  $r = \frac{-\mathcal{W}}{\mathcal{Q}_{C \rightarrow D}}$  en fonction de  $\alpha = \frac{V_B}{V_A}$  (appelé *taux de compression*) :

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{-\mathcal{W}}{\mathcal{Q}_{C \rightarrow D}} \\
 &= 1 + \frac{\mathcal{Q}_{E \rightarrow B}}{\mathcal{Q}_{C \rightarrow D}} \quad \text{car } \mathcal{W} + \mathcal{Q}_{C \rightarrow D} + \mathcal{Q}_{E \rightarrow B} = 0 \\
 &= 1 + \frac{\frac{\Delta \mathcal{U}_{E \rightarrow B}}{\Delta \mathcal{U}_{C \rightarrow D}}}{\frac{\Delta \mathcal{U}_{C \rightarrow D}}{\Delta \mathcal{U}_{C \rightarrow D}}} \quad \text{car } \mathcal{W}_{E \rightarrow B} = \mathcal{W}_{C \rightarrow D} = 0 \\
 &= 1 + \frac{T_B - T_E}{T_D - T_C} \\
 &= 1 + \frac{T_B - T_E}{\alpha^{\gamma-1} (T_E - T_B)} \quad \text{car } TV^{\gamma-1} = \text{constante} \\
 &\quad \text{pour } B \rightarrow C \text{ et } D \rightarrow E \\
 &\quad \text{et } V_A = V_C = V_D \text{ et } V_B = V_E \\
 &= 1 - \alpha^{1-\gamma}.
 \end{aligned}$$

# Chapitre 22

## Introduction aux Champs Magnétiques

### I Description

**Définition 22.1** (Champ magnétique). *Quels que soient les effets magnétiques observés en un point de l'espace, une seule grandeur est nécessaire pour les décrire : un champ vectoriel appelé champ magnétique  $\vec{B}$ .*

L'unité du champ magnétique est le *Tesla* (T). Et on a  $1 \text{ T} = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$ . On utilise parfois le *Gauss* :  $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$ .

### II Lignes de champ et spectre magnétique

**Définition 22.2** (Lignes de champ). *On appelle ligne de champ d'un champ magnétique une courbe telle, qu'en chacun de ses points, le vecteur  $\vec{B}$  lui soit tangent. Par convention, les lignes de champ sont orientées dans le sens du champ magnétique.*

Si on note  $d\vec{\ell}$  un vecteur déplacement élémentaire de la ligne de champ, on a donc  $d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ . Cela peut permettre, par la résolution d'un système d'équations différentielles, de retrouver une *équation cartésienne ou polaire* d'une ligne de champ.

Dans le cas des aimants, le champ magnétique est orienté du pôle nord de l'aimant vers son pôle sud.

**Vocabulaire 22.3** (Spectre magnétique). *On appelle spectre magnétique l'ensemble des lignes de champ.*

### III Propriétés du champ magnétique

#### Propriété 22.4.

- (i) *Les lignes de champ ne se coupent pas, sauf en un point où le champ est nul.*
- (ii) *Les lignes de champ se resserrent dans les zones où l'intensité du champ magnétique est la plus élevée.*
- (iii) *Dans les zones où le champ magnétique est uniforme, les lignes de champ sont des droites parallèles.*

**Définition 22.5** (Flux magnétique). *Le flux magnétique est défini par :*

$$\Phi = \iint_{\text{circuit}} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

**Propriété 22.6.** *Le champ magnétique est à flux conservatif :*

$$\oiint_{S_G} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0,$$

où  $S_G$  est une surface de Gauss. La forme locale de ce principe s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

**Formule 22.7** (Champ magnétique généré par un conducteur rectiligne). *En se plaçant à une distance  $d$  d'un conducteur rectiligne parcouru par un courant  $I$ , la champ magnétique vaut :*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \vec{u}_\vartheta,$$

où  $\vec{u}_\vartheta$  est un vecteur unitaire orthoradial, et  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  est la permittivité du vide.

**Formule 22.8** (Champ magnétique généré par une bobine). *L'intensité du champ magnétique  $\vec{B}$  au centre d'une bobine de  $n$  spires, de longueur  $\ell$ , de rayon  $r$ , parcourue par un courant  $I$ , vaut :*

$$B = \frac{\mu_0 n I}{\sqrt{4r^2 + \ell^2}}.$$

**Définition 22.9** (Moment magnétique). *Le moment magnétique  $\vec{m}$  d'une bobine de surface  $S$  parcourue par un courant  $I$  vaut :*

$$\vec{m} = I\vec{S},$$

où  $\vec{S}$  est le vecteur surface normal à la spire et orienté par rapport au courant.

## IV Symétrie des spectres magnétiques

**Propriété 22.10.**

(i) *S'il existe un plan de symétrie  $\mathcal{P}_S$ , alors, pour tout point  $M$  :*

$$\vec{B} \left( \underset{\mathcal{P}_S}{\operatorname{sym}(M)} \right) = -\underset{\mathcal{P}_S}{\operatorname{sym}} \left( \vec{B}(M) \right).$$

(ii) *S'il existe un plan d'anti-symétrie  $\mathcal{P}_A$ , alors, pour tout point  $M$  :*

$$\vec{B} \left( \underset{\mathcal{P}_A}{\operatorname{sym}(M)} \right) = \underset{\mathcal{P}_A}{\operatorname{sym}} \left( \vec{B}(M) \right).$$



## Actions d'un Champ Magnétique

### I Force de Laplace

On considère un conducteur dans lequel règne un courant  $I$  et un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ . La force de Lorentz élémentaire exercée sur une particule chargée s'écrit

$$d\vec{F} = dq \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Or, on peut écrire  $d\vec{\ell} = \vec{v} dt$ , et  $I = \frac{dq}{dt}$ . On obtient donc la formule suivante :

**Loi 23.1** (Force de Laplace). *La force de Laplace élémentaire est donnée par :*

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

### II Application à une barre rectiligne

#### II.1 Expérience

On considère une tige  $A_1A_2$  reliant deux fils d'un circuit électrique ouvert alimenté par un générateur de courant  $I$  et placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . La force de Laplace est donnée par :

$$\vec{F}_L = \int_{A_1}^{A_2} d\vec{F}_L = \int_{A_1}^{A_2} I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I \cdot \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \vec{B}.$$

#### II.2 Point d'application

**Définition 23.2** (Point d'application de la force de Laplace). *Le point d'application de la force de Laplace est le point de la barre par rapport auquel le moment résultant de l'ensemble des forces élémentaires  $d\vec{F}_L$  est nul.*

On cherche les coordonnées d'un point  $M_0$  de la tige vérifiant

$$\int_{A_1}^{A_2} \overrightarrow{M_0M} \wedge d\vec{F}_L = \int_0^{-\ell} [(y - y_0)\vec{u}_y \wedge (-IB dy\vec{u}_x)] = \vec{0},$$

où  $\ell$  est la longueur de la tige,  $\vec{u}_y$  est parallèle à la tige et  $\vec{u}_z$  est colinéaire à  $\vec{B}$ . On obtient  $y_0 = -\frac{\ell}{2}$ .

Le point d'application de la force de Laplace s'exerçant sur une barre rectiligne parcourue par un courant et placée dans un champ magnétique est au milieu de la barre.

### II.3 Puissance

On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \vec{F}_L \cdot \vec{v} = \left( I \cdot \overrightarrow{A_1 A_2} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{v} \\ &= (I (\ell \vec{u}_y) \wedge (B \vec{u}_z)) \cdot (v_x \vec{u}_x) = I \ell B v_x. \end{aligned}$$

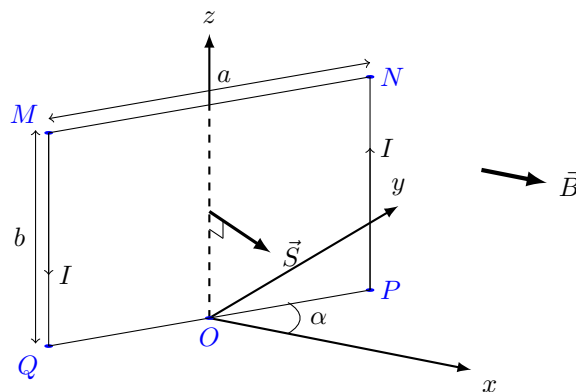
Or le flux du champ magnétique est donné par  $\Phi = \iint_{\text{circuit}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ . On en déduit  $\frac{d\Phi}{dt} = \ell v_x B$ , d'où :

$$\boxed{\mathcal{P} = I \frac{d\Phi}{dt}.}$$

Ce dispositif permet de convertir de l'énergie électrique fournie par le générateur créant le courant dans le circuit en énergie mécanique. Un tel dispositif réalisant la transformation d'une forme d'énergie en une autre est appelée un *transducteur*.

## III Action d'un champ magnétique sur un moment magnétique

### III.1 Dispositif étudié



Spire rectangulaire en mouvement dans un champ magnétique

On étudie le mouvement d'une spire rectangulaire, parcourue par un courant  $I$ , dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . La spire est libre de tourner autour de l'axe  $(Oz)$ , mais ne peut pas se déplacer verticalement.

### III.2 Moment du couple exercé sur la spire

La résultante des forces de Laplace s'écrit :

$$\vec{F}_L = \oint_{\text{spire}} I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I \left( \oint_{\text{spire}} d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

Ceci est intuitif : le champ magnétique ne met pas en mouvement le centre de masse de la spire.

On s'intéresse alors au moment de  $\vec{F}_L$  :

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{M}}_O &= \oint_{\text{spire}} d\vec{\mathcal{M}}_O = \oint_{\text{spire}} \vec{OA} \wedge (I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) \\
 &= I \underbrace{\int_M^Q \vec{OA} \wedge (d\vec{\ell} \wedge \vec{B})}_{\vec{\mathcal{M}}_{MQ}} + I \underbrace{\int_Q^P \vec{OA} \wedge (d\vec{\ell} \wedge \vec{B})}_{\vec{\mathcal{M}}_{QP}} \\
 &\quad + I \underbrace{\int_P^N \vec{OA} \wedge (d\vec{\ell} \wedge \vec{B})}_{\vec{\mathcal{M}}_{PN}} + I \underbrace{\int_N^M \vec{OA} \wedge (d\vec{\ell} \wedge \vec{B})}_{\vec{\mathcal{M}}_{NM}}.
 \end{aligned}$$

On peut alors calculer séparément les différents moments :

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{M}}_{PN} &= I \int_0^b \left( \frac{a}{2} (\cos \alpha) \vec{u}_x + \frac{a}{2} (\sin \alpha) \vec{u}_y + z \vec{u}_z \right) \wedge (dz \vec{u}_z \wedge B \vec{u}_x) \\
 &= IB \left[ \left( \int_0^b \frac{a}{2} \cos \alpha dz \right) \vec{u}_z - \left( \int_0^b z dz \right) \vec{u}_x \right] \\
 &= IB \left( \frac{ab}{2} (\cos \alpha) \vec{u}_z - \frac{b^2}{2} \vec{u}_x \right), \\
 \vec{\mathcal{M}}_{MQ} &= IB \left( \frac{ab}{2} (\cos \alpha) \vec{u}_z + \frac{b^2}{2} \vec{u}_x \right).
 \end{aligned}$$

De plus, en considérant des points de  $[QP]$  et  $[NM]$  symétriques par rapport à  $(Oz)$ , on voit que  $\vec{\mathcal{M}}_{QP} = \vec{\mathcal{M}}_{NM} = \vec{0}$ . On obtient au final :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = abIB (\cos \alpha) \vec{u}_z.$$

En notant  $\Delta = (Oz)$ , on a

$$\mathcal{M}_\Delta = abIB \cos \alpha.$$

Calculons de plus le moment magnétique  $\vec{m}$  de la spire :

$$\vec{m} = I\vec{S} = Iab ((\sin \alpha) \vec{u}_x - (\cos \alpha) \vec{u}_y).$$

On remarque que  $\vec{m} \wedge \vec{B} = abIB (\cos \alpha) \vec{u}_z = \vec{\mathcal{M}}_O$ . On a donc :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{m} \wedge \vec{B}.}$$

### III.3 Puissance des forces de Laplace

On cherche à calculer la puissance  $\mathcal{P}$  :

$$\mathcal{P} = \oint_{\text{spire}} d\vec{F} \cdot \vec{v} = \int_P^N d\vec{F} \cdot \vec{v} + \int_N^M d\vec{F} \cdot \vec{v} + \int_M^Q d\vec{F} \cdot \vec{v} + \int_Q^P d\vec{F} \cdot \vec{v}.$$

En notant  $\vec{\omega} = \frac{d\alpha}{dt} \vec{u}_z$ , on a  $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$ . Donc :

$$\begin{aligned} \int_P^N d\vec{F} \cdot \vec{v} &= \int_P^N d\vec{F} \cdot (\omega \wedge (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA})) = \int_P^N d\vec{F} \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) \\ &= \left( \int_P^N d\vec{F} \right) \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) = \underbrace{I(\overrightarrow{PN} \wedge \vec{B})}_{\vec{F}_{PN}} \cdot (\omega \wedge \overrightarrow{OP}), \\ \int_M^Q d\vec{F} \cdot \vec{v} &= \underbrace{I(\overrightarrow{MQ} \wedge \vec{B})}_{\vec{F}_{MQ}} \cdot (\omega \wedge \overrightarrow{OP}). \end{aligned}$$

Et  $\int_N^M d\vec{F} \cdot \vec{v} = \int_Q^P d\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ . Donc :

$$\mathcal{P} = \vec{\omega} \cdot [\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_{PN} + \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_{MQ}] = 2\vec{\omega} \cdot (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_{PN}) = \vec{\omega} \cdot (abIB (\cos \alpha) \vec{u}_z).$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{P} = \vec{\omega} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = \omega \mathcal{M}_\Delta.}$$

On retrouve le résultat général vu en mécanique pour la rotation d'un solide autour d'un axe fixe.

### III.4 Généralisation

On admet le résultat général suivant :

**Loi 23.3.** *Les actions mécaniques s'exerçant sur tout dispositif décrit par un moment magnétique  $\vec{m}$  et placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et stationnaire sont équivalentes à un couple de moment*

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B}.}$$

La résultante des actions est nulle et la puissance est :

$$\boxed{\mathcal{P} = \vec{\omega} \cdot \vec{\mathcal{M}}.}$$

### III.5 Équilibre et stabilité

Notons que  $\mathcal{P} = \frac{d\alpha}{dt} abIB \cos \alpha = -\frac{d}{dt} (-abIB \sin \alpha) = -\frac{d}{dt} (-\vec{m} \cdot \vec{B})$ . Les forces de Laplace sont donc *conservatives* et associées à une énergie potentielle donnée par

$$\boxed{\mathcal{E}_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}.}$$

# Chapitre 24

## Induction

### I Lois de l'induction

#### I.1 Expériences

**Définition 24.1** (Induction). *Il y a induction lorsqu'une tension ou un courant apparaît dans un circuit dépourvu de générateur.*

On peut mettre en évidence des phénomènes d'induction grâce aux expériences suivantes :

- (i) On déplace un conducteur mobile dans un champ magnétique fixe.
- (ii) On place un conducteur fixe dans un champ magnétique variable.

Dans les deux cas, on a une variation du flux du champ magnétique à travers le circuit étudié.

#### I.2 Loi de Lenz : approche qualitative

**Loi 24.2** (Loi de Lenz). *Le courant induit tend, par ses effets, à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance.*

#### I.3 Loi de Faraday : approche quantitative

**Loi 24.3** (Loi de Faraday). *Soit un circuit fermé et orienté traversé par un flux magnétique  $\Phi$ . Toute variation de ce flux provoque l'apparition, dans le circuit, d'une force électromotrice  $e$  appelée force électromotrice induite et donnée par :*

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

*La force électromotrice induite est fléchée dans le sens positif qui a été choisi dans le circuit.*

Par exemple, on considère un circuit constitué d'une simple résistance  $R$  et placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme dans l'espace mais variable dans le temps. On oriente arbitrairement le circuit (on choisit ici le sens opposé à celui correspondant au champ magnétique, i.e.  $\vec{S}$  a le sens de  $-\vec{B}$ ). On écrit alors  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = -BS$ . On en déduit  $e = -\frac{d\Phi}{dt} = S\frac{dB}{dt}$ . Ainsi, si  $B$  augmente, le courant est dirigé dans le sens choisi (et tend donc à s'opposer au champ magnétique). On retrouve la loi de Lenz.

## II Cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique variable

### II.1 Flux propre

**Vocabulaire 24.4** (Auto-induction). *On parle d'auto-induction lorsque le flux magnétique à l'origine de l'induction dans un circuit est créé par le circuit lui-même.*

Soit un circuit  $\Gamma$ , fixe et indéformable, parcouru par un courant d'intensité  $i$ . Ce circuit crée un champ magnétique  $\vec{B}$ , auquel correspond un flux  $\Phi_p$  à travers  $\Gamma$ . Ce flux magnétique créé par le circuit à travers lui-même est appelé *flux propre*.

S'il existe d'autres sources de champs magnétiques à proximité du circuit  $\Gamma$ , le flux magnétique total à travers  $\Gamma$  est la somme du flux propre et du flux extérieur.

### II.2 Inductance propre

On considère le même circuit que précédemment et on considère un point  $M$  à l'intérieur du circuit. On peut écrire  $\vec{B}(M, t) = i(t) \cdot k(M) \cdot \vec{u}(M)$ , où  $k(M)$  est une constante et  $\vec{u}(M)$  un vecteur unitaire dépendant du point  $M$  considéré. Ainsi :

$$\Phi_p = \iint_{\text{circuit}} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S} = i(t) \iint_{\text{circuit}} k(M) \vec{u}(M) \cdot d\vec{S}.$$

Or l'intégrale  $\iint_{\text{circuit}} k(M) \vec{u}(M) \cdot d\vec{S}$  ne dépend que de la géométrie du circuit ; on la note  $L$  et on a alors :

$$\boxed{\Phi_p = Li.}$$

On a donc

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}.$$

Puisque  $e$  est ici orienté dans le même sens que le courant  $i$ , on retrouve en se plaçant en convention récepteur :  $e' = L \frac{di}{dt}$ . C'est l'équation d'une bobine d'inductance  $L$ .

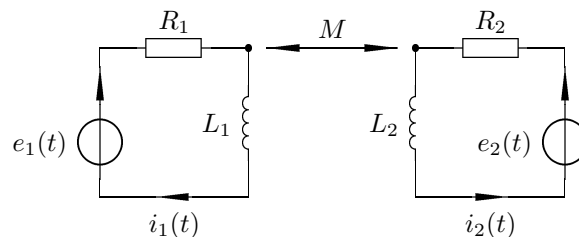
### II.3 Interaction entre deux circuits

**Définition 24.5** (Inductance mutuelle). *Soit deux circuits  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  parcourus par des courants  $i_1$  et  $i_2$ . Soit  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  (resp.  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ ) le flux magnétique créé par  $\Gamma_1$  (resp.  $\Gamma_2$ ) à travers  $\Gamma_2$  (resp.  $\Gamma_1$ ). Alors il existe un coefficient  $M$ , appelé coefficient d'inductance mutuelle, tel que :*

$$\boxed{\Phi_{1 \rightarrow 2} = Mi_1 \quad \text{et} \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} = Mi_2.}$$

$M$  ne dépend que de la géométrie de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  et de leurs positions relatives.

On considère deux circuits  $RL$  en interaction et dont l'inductance mutuelle vaut  $M$ .



On a :

$$e_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad (\text{i})$$

$$e_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}. \quad (\text{ii})$$

La combinaison linéaire  $i_1(\text{i}) + i_2(\text{ii})$  donne :

$$\underbrace{e_1 i_1 + e_2 i_2}_{\substack{\text{puissance fournie} \\ \text{par les générateurs}}} = \underbrace{R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2}_{\substack{\text{puissance perdue} \\ \text{par effet Joule}}} + \frac{d}{dt} \underbrace{\left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)}_{\substack{\text{énergie magnétique emmagasinée} \\ \text{dans le circuit}}}.$$

### III Cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique fixe

#### III.1 Conversion d'énergie mécanique en énergie électrique

On s'intéresse aux *rails de Laplace* : on a un circuit électrique ouvert, de résistance totale  $R$ , constitué de deux rails parallèles reliés à une extrémité par un fil. On relie les deux rails par une tige mobile de longueur  $\ell$ , se déplaçant à une vitesse  $\vec{v} = v_x \vec{u}_x$ . Le tout est placé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B \vec{u}_z$ . On a  $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \ell x$ , donc

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \ell \dot{x}.$$

Si un opérateur impose une vitesse constante, le PFD appliqué au système {tige} s'écrit :

$$\vec{F}_L + \vec{F}_{\text{opérateur}} = \vec{0}.$$

Ainsi  $\vec{F}_{\text{opérateur}} = -\vec{F}_L = \frac{B^2 \ell^2 v_x}{R} \vec{u}_x$ . Donc  $\mathcal{P}_{\text{opérateur}} = \frac{B^2 \ell^2 v_x^2}{R}$ . Et on a :  $\mathcal{P}_{\text{perdue par effet Joule}} = \frac{e^2}{R}$ .

On constate que :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{opérateur}} = \mathcal{P}_{\text{perdue par effet Joule}}}$$

On s'intéresse maintenant à une *spire en rotation* autour de l'axe  $\vec{u}_z$  avec une vitesse angulaire  $\omega$  constante. Le tout est placé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B \vec{u}_z$ . On a  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B a b \cos \vartheta$ , donc

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = B a b \omega \sin \vartheta.$$

La vitesse de rotation étant constante, le couple  $\mathcal{M}_z$  (moteur) assurant la rotation, et le couple des forces de Laplace  $\mathcal{M}_{Lz}$  vérifient

$$\mathcal{M}_z + \mathcal{M}_{Lz} = 0.$$

La puissance mécanique fournie à la spire est égale à la puissance électrique que la force électromotrice induite fournit au circuit.

### III.2 Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

On s'intéresse à nouveau aux rails de Laplace, en considérant maintenant que le circuit est alimenté par un générateur de tension  $E$ . Le bilan mécanique s'écrit  $m\vec{a} = \underbrace{\vec{P} + \vec{R}}_{\vec{0}} + \vec{F}_L$ , soit, en projection sur  $(Ox)$  :  $m\ddot{x} = i\ell B$ . Le bilan électrique s'écrit quant à lui  $E = Ri - e = Ri + Bl\dot{x}$ . On a donc deux équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = i\ell B \\ E = Ri + Bl\dot{x} \end{cases} .$$

On obtient alors :

$$\ddot{x} + \frac{(\ell B)^2}{mR} \dot{x} = \frac{E\ell B}{mR} .$$

La résolution de cette ED du premier ordre en  $\dot{x}$  donne, en considérant que la vitesse initiale est nulle :

$$\dot{x} = \frac{E}{\ell B} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right) ,$$

avec  $\tau = \frac{mR}{(\ell B)^2}$ .

## IV Applications

Ceci permet d'expliquer le principe du *haut-parleur*. Considérons en effet des rails de Laplace alimentés par une force électromotrice  $E$ , avec une membrane fixée sur la tige (subissant une force de frottement fluide  $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ ), et un ressort reliant cette tige à un point fixe. L'équation mécanique et l'équation électrique s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\lambda\dot{x} - kx + i\ell B \\ E = Ri + Bl\dot{x} \end{cases} .$$

On se place en régime sinusoïdal forcé et on définit  $\underline{X}$  et  $\underline{I}$  par  $x(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$  et  $i(t) = \underline{I}e^{j\omega t}$ . On a alors :

$$\begin{cases} -m\omega^2 \underline{X} = -\lambda j\omega \underline{X} - k\underline{X} + \underline{I}\ell B \\ E = R\underline{I} + Blj\omega \underline{X} \end{cases} .$$

Il vient ainsi :

$$\underline{X} = \underline{I} \cdot \frac{\ell B}{(k - m\omega^2) + j\lambda\omega} .$$