

# Géométrie des groupes et courbure négative

Alexis Marchand

16 juillet 2019

## Résumé

Cet article est une courte incursion dans le riche univers de la théorie géométrique des groupes. Dans un premier temps, nous verrons comment un groupe peut être vu comme un objet géométrique, introduisant ainsi les idées fondamentales de cette théorie. Nous nous intéresserons ensuite à un exemple spécifique de propriété géométrique des groupes : la propriété  $CAT(0)$ , ou propriété de courbure globalement négative. Enfin, nous montrerons un exemple de conséquence algébrique que peut avoir cette propriété géométrique.

## 1 Les groupes sous l'œil du géomètre

Les groupes, malgré leur définition algébrique, entretiennent des liens étroits avec la géométrie ; un groupe apparaît souvent de manière naturelle comme un sous-groupe du groupe d'isomorphismes d'un objet géométrique. Partant de ce constat, il semble naturel d'utiliser des techniques et un point de vue géométriques dans le but d'étudier les groupes en tant qu'objets algébriques. Cette idée a pris une grande importance depuis les années 1980, sous l'impulsion de Mikhail Gromov, et a donné naissance à une branche des mathématiques à part entière : la théorie géométrique des groupes.

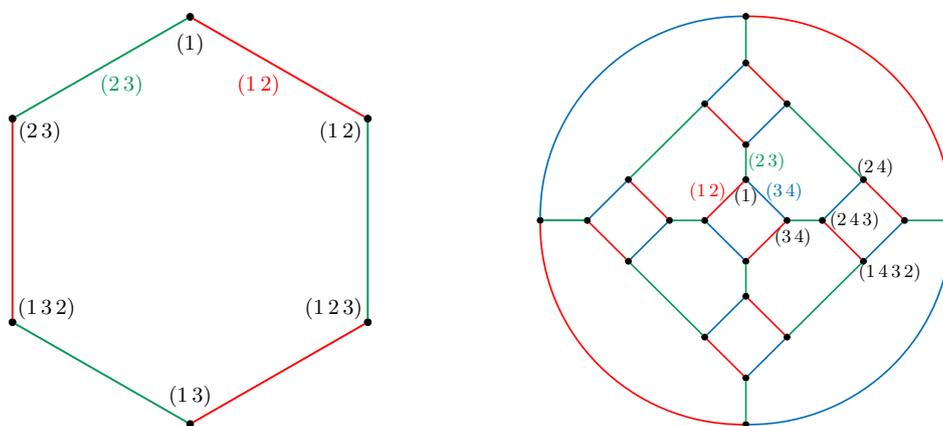


FIGURE 1 – Les graphes de Cayley de  $(\mathfrak{S}_3, \{(12), (23)\})$  et  $(\mathfrak{S}_4, \{(12), (23), (34)\})$ .

On considère un groupe  $\Gamma$  muni d'une partie génératrice  $S$ . On définit le **graphe de Cayley** du couple  $(\Gamma, S)$ , noté  $\text{Cay}(\Gamma, S)$ , comme le graphe orienté dont les sommets sont les éléments de  $\Gamma$  et tel qu'une arête va de  $\gamma_1 \in \Gamma$  à  $\gamma_2 \in \Gamma$  si et seulement s'il existe un générateur  $s \in S$  tel que

$\gamma_2 = \gamma_1 s$  ; si tel est le cas, l'arête est étiquetée par  $s$  (on pourra parler de  $s$ -arête). En pratique, on dessine un graphe où chaque générateur correspond à une couleur. De plus, si un générateur  $s$  est d'ordre 2, alors une  $s$ -arête relie  $\gamma_1$  à  $\gamma_2$  si et seulement si une  $s$ -arête relie  $\gamma_2$  à  $\gamma_1$  ; dans ce cas, on ne dessine qu'une seule arête non orientée entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , comme sur la Figure 1.

Le graphe de Cayley se veut une représentation géométrique du groupe  $\Gamma$  ; il s'agit maintenant de le munir d'une structure supplémentaire pour en faire effectivement un objet géométrique. En fait, on le munit d'une structure de **graphe métrique** en attribuant à chaque arête la longueur 1, ce qui définit une distance sur la réunion des sommets et des arêtes du graphe, donnée par la longueur du chemin le plus court dans le graphe entre deux points. La remarque suivante sera fondamentale pour la suite :

**Remarque 1.** *Un chemin entre deux sommets du graphe de Cayley correspond à un mot sur l'ensemble  $S$ .*

Cette remarque prouve en particulier que  $\text{Cay}(\Gamma, S)$  est connexe (en tant que graphe et en tant qu'espace métrique) car  $S$  engendre  $\Gamma$ . De plus, la distance entre deux éléments  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $\Gamma$  est la longueur du mot le plus court sur l'ensemble  $S \cup S^{-1}$  qui est égal à  $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ . Pour cette raison, la distance induite par celle de  $\text{Cay}(\Gamma, S)$  sur  $\Gamma$  sera appelée **métrique des mots** associée à  $S$  et notée  $d_S$ . On notera de plus  $\ell_S(\gamma) = d_S(1, \gamma)$  la longueur minimale d'un mot sur  $S \cup S^{-1}$  égal à  $\gamma$ .

La raison formelle pour laquelle  $\text{Cay}(\Gamma, S)$  est une bonne manière de représenter  $\Gamma$  est l'existence d'une action de  $\Gamma$  sur  $\text{Cay}(\Gamma, S)$  avec des propriétés géométriques :

**Proposition 1.** *L'action de  $\Gamma$  sur lui-même par multiplication à gauche est compatible avec la structure de graphe de  $\text{Cay}(\Gamma, S)$  et induit donc une **action par isométries** sur  $\text{Cay}(\Gamma, S)$ . En supposant de plus l'ensemble  $S$  fini, cette action a les propriétés suivantes :*

- (i) *L'action est **propre** : pour tout compact  $K \subset \text{Cay}(\Gamma, S)$ , l'ensemble  $\{\gamma \in \Gamma, \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$  est fini.*
- (ii) *L'action est **cocompacte** : il existe un compact  $K \subset \text{Cay}(\Gamma, S)$  tel que  $\text{Cay}(\Gamma, S) = \Gamma \cdot K$  ( $\text{Cay}(\Gamma, S)$  étant localement compact, ceci équivaut à dire que le quotient  $\text{Cay}(\Gamma, S) / \Gamma$  est compact).*

*Démonstration.* S'il existe une  $s$ -arête de  $\gamma_1$  à  $\gamma_2$ , alors  $\gamma_2 = \gamma_1 s$ , donc pour tout  $g \in \Gamma$ ,  $g\gamma_2 = (g\gamma_1)s$  et il existe une  $s$ -arête de  $g\gamma_1$  à  $g\gamma_2$ . Ceci prouve que l'action de  $\Gamma$  sur lui-même est compatible avec la structure de graphe de  $\text{Cay}(\Gamma, S)$ , d'où l'existence d'une action par isométries de  $\Gamma$  sur  $\text{Cay}(\Gamma, S)$ . On suppose maintenant  $S$  fini.

(i) Pour montrer que l'action est propre, il suffit de montrer que  $\{\gamma \in \Gamma, \gamma B \cap B \neq \emptyset\}$  est fini pour toute boule fermée  $B$  centrée en 1 de rayon entier. Soit donc  $r \in \mathbb{N}^*$  et soit  $B_r$  la boule fermée de centre 1 et de rayon  $r$  dans  $\Gamma$ . Alors :

$$\begin{aligned} \{\gamma \in \Gamma, \gamma B_r \cap B_r \neq \emptyset\} &\subset \{\gamma \in \Gamma, d_S(1, \gamma) \leq 2r\} \\ &= \left\{ s_1 \cdots s_{2r}, (s_1, \dots, s_{2r}) \in (S \cup S^{-1} \cup \{1\})^{2r} \right\}. \end{aligned}$$

Comme  $S$  est fini,  $(S \cup S^{-1} \cup \{1\})^{2r}$  est fini et les ensembles ci-dessus sont tous finis.

(ii) Comme l'action de  $\Gamma$  sur lui-même est transitive, l'action de  $\Gamma$  sur l'ensemble des  $s$ -arêtes est transitive pour tout  $s \in S$ . Pour  $s \in S$ , choisissons donc une  $s$ -arête  $E_s$  (qui est compacte car isométrique à  $[0, 1]$ ) et posons  $K = \bigcup_{s \in S} E_s$  ; on a ainsi  $\text{Cay}(\Gamma, S) = \Gamma \cdot K$ , et  $K$  est compact.  $\square$

## 2 La notion de quasi-isométrie

Nous avons maintenant associé à tout groupe finiment engendré  $\Gamma$  une structure d'espace métrique (donnée par la métrique des mots). Malheureusement, cette structure n'est pas canonique mais dépend du choix d'une partie génératrice de  $\Gamma$ . Pour contourner ce problème, nous allons définir une relation d'équivalence  $\sim$  entre les espaces métriques telle que, si  $S, S'$  sont deux ensembles finis engendrant  $\Gamma$ , alors  $(\Gamma, d_S) \sim (\Gamma, d_{S'})$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces métriques, une application  $f : X \rightarrow Y$  est appelée un **plongement quasi-isométrique** lorsqu'il existe  $\lambda \geq 1$  et  $\varepsilon \geq 0$  tels qu'on ait, pour tout  $x, x' \in X$  :

$$\frac{1}{\lambda}d(x, x') - \varepsilon \leq d(f(x), f(x')) \leq \lambda d(x, x') + \varepsilon.$$

On dit de plus que  $g : Y \rightarrow X$  est une **quasi-réciproque** de  $f$  lorsque  $\sup_{x \in X} d(g \circ f(x), x) < +\infty$  et  $\sup_{y \in Y} d(f \circ g(y), y) < +\infty$ . L'application  $f$  est appelée **quasi-isométrie** si c'est un plongement quasi-isométrique admettant une quasi-réciproque (qui est alors automatiquement un plongement quasi-isométrique) ; on dit dans ce cas que  $X$  et  $Y$  sont quasi-isométriques. Ainsi, la relation de quasi-isométrie est une relation d'équivalence entre espaces métriques. Elle correspond à se placer dans la catégorie dont les objets sont les espaces métriques et les flèches sont les classes d'équivalence de plongements quasi-isométriques pour la relation  $\sim$  définie par :  $f \sim g$  si et seulement si  $\sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) < +\infty$ .

Si on veut interpréter la notion de quasi-isométrie, elle correspond à regarder de manière grossière la structure des espaces métriques. La relation d'isométrie permet d'observer les détails fins des espaces métriques, et la relation de quasi-isométrie revient à faire un pas en arrière, oublier ces détails et regarder les espaces globalement. Par exemple,  $\mathbb{R}^n$  est quasi-isométrique à  $\mathbb{Z}^n$  (mais pas du tout isométrique, ni même homéomorphe!). On a effacé tous les détails qui n'ont qu'une influence finie dans un certain sens ; en contrepartie, la relation obtenue permet de considérer que, d'un point de vue géométrique, un groupe ne dépend pas du choix d'une partie génératrice finie, comme le montre la proposition suivante :

**Proposition 2.** *Soit  $\Gamma$  un groupe et  $S, S'$  deux parties génératrices finies de  $\Gamma$ . Alors les espaces métriques  $(\Gamma, d_S)$  et  $(\Gamma, d_{S'})$  sont quasi-isométriques.*

*Démonstration.* On va montrer que  $\text{id}_\Gamma : (\Gamma, d_S) \rightarrow (\Gamma, d_{S'})$  est un plongement quasi-isométrique ; ce sera alors clairement une quasi-isométrie car  $\text{id}_\Gamma : (\Gamma, d_{S'}) \rightarrow (\Gamma, d_S)$  en est une réciproque (donc une quasi-réciproque). Posons donc :

$$\lambda = \max \left\{ \max_{s \in S \cup S^{-1}} \ell_{S'}(s), \max_{s' \in S' \cup S'^{-1}} \ell_S(s') \right\}.$$

On vérifie alors aisément que  $\frac{1}{\lambda}d_S(\gamma_1, \gamma_2) \leq d_{S'}(\gamma_1, \gamma_2) \leq \lambda d_S(\gamma_1, \gamma_2)$  pour tous  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ .  $\square$

Maintenant, tout groupe finiment engendré a une structure canonique d'espace métrique, bien définie à quasi-isométrie près. Cela a donc notamment un sens de dire qu'un groupe finiment engendré  $\Gamma$  est quasi-isométrique à un espace métrique  $X$  ou encore à un autre groupe finiment engendré  $\Lambda$ .

Le théorème suivant donne une caractérisation par couplages de la relation de quasi-isométrie entre les groupes ; cette caractérisation montre que la relation de quasi-isométrie est la bonne généralisation géométrique de celle d'isomorphisme :

**Théorème 1.** Soit  $\Gamma$  et  $\Lambda$  deux groupes finiment engendrés.

- (i)  $\Gamma$  et  $\Lambda$  sont isomorphes si et seulement s'il existe un ensemble  $X$  et une action de  $\Gamma \times \Lambda$  sur  $X$  telle que les actions induites de  $\Gamma$  et  $\Lambda$  sur  $X$  sont simplement transitives. L'action de  $\Gamma \times \Lambda$  sur  $X$  est alors appelée un **couplage parfait**.
- (ii)  $\Gamma$  et  $\Lambda$  sont quasi-isométriques si et seulement s'il existe un espace topologique localement compact  $X$  et une action de  $\Gamma \times \Lambda$  sur  $X$  telle que les actions induites de  $\Gamma$  et  $\Lambda$  sur  $X$  sont propres, cocompactes et par homéomorphismes. L'action de  $\Gamma \times \Lambda$  sur  $X$  est alors appelée un **couplage topologique**.

La démonstration du (i) est un exercice facile ; pour le (ii), la preuve est relativement longue et nous renvoyons le lecteur intéressé à [Sau02, Section 2.1].

### 3 Le Lemme de Švarc-Milnor

On va maintenant montrer que si un groupe  $\Gamma$  agit "géométriquement" sur un "bon" espace  $X$ , alors  $\Gamma$  est finiment engendré et quasi-isométrique à  $X$ . On en déduira notamment que pour toute partie génératrice finie  $S$ ,  $\Gamma$  est quasi-isométrique à  $\text{Cay}(\Gamma, S)$ .

Commençons par le lemme suivant, qui permet d'obtenir une partie génératrice d'un groupe agissant sur un espace topologique, dans un cadre très général :

**Lemme 1.** Soit  $\Gamma$  un groupe agissant par homéomorphismes sur un espace topologique connexe  $X$ . Si  $U$  est un ouvert de  $X$  tel que  $X = \Gamma \cdot U$ , alors l'ensemble  $S = \{\gamma \in \Gamma, \gamma U \cap U \neq \emptyset\}$  engendre  $\Gamma$ .

*Démonstration.* Posons  $V = \langle S \rangle \cdot U$  et  $W = (\Gamma \setminus \langle S \rangle) \cdot U$ . Il s'agit de montrer que  $W = \emptyset$ . Notons que  $V \cap W = \emptyset$ . En effet, si  $x \in V \cap W$ , alors il existe  $\sigma \in \langle S \rangle$  et  $\tau \in \Gamma \setminus \langle S \rangle$  tels que  $x \in \sigma U \cap \tau U$  ; mais alors  $\tau^{-1}\sigma U \cap U \neq \emptyset$  donc  $\tau^{-1}\sigma \in S$  et  $\tau \in \langle S \rangle$ , ce qui est faux. Ainsi,  $V$  et  $W$  forment une partition de  $X$  en ouverts disjoints. Comme  $X$  est connexe et  $V \neq \emptyset$ , il vient  $W = \emptyset$ .  $\square$

Il nous faut maintenant introduire la notion d'espace de longueur. Dans un espace métrique  $X$ , la **longueur** d'un chemin  $c : [a, b] \rightarrow X$  est définie par :

$$\ell(c) = \sup_{a=t_0 < t_1 < \dots < t_k = b} \sum_{j=0}^{k-1} d_X(c(t_j), c(t_{j+1})).$$

On dit que  $X$  est un **espace de longueur** (resp. **espace géodésique**) lorsque, pour tout couple de points  $x, y \in X$ , la distance  $d_X(x, y)$  est égale à la *borne inférieure* (resp. au *minimum*) des longueurs des chemins de  $x$  à  $y$ . Une condition équivalente pour que l'espace  $X$  soit géodésique est que pour tous points  $x, y \in X$ , il existe un chemin  $c : [0, \delta] \rightarrow X$  de  $x$  à  $y$  qui soit un plongement isométrique, avec  $\delta = d_X(x, y)$ . Le chemin  $c$  est alors appelé **géodésique paramétrée par longueur d'arc**. Pour  $\lambda > 0$ , tout chemin de la forme  $t \mapsto c(\lambda t)$  est alors appelé **géodésique linéairement reparamétrée** et a une longueur égale à  $d_X(x, y)$ .

**Remarque 2.** Un graphe métrique est par définition un espace de longueur. De plus, si  $\Gamma$  est un groupe muni d'une partie génératrice finie  $S$ , alors  $\text{Cay}(\Gamma, S)$  est un espace géodésique.

Nous sommes prêts à démontrer le Lemme de Švarc-Milnor, aussi appelé *observation fondamentale de la théorie géométrique des groupes* :

**Théorème 2** (Švarc-Milnor). Soit  $\Gamma$  un groupe agissant proprement cocompactement par isométries sur un espace métrique  $X$ . On suppose que  $X$  est un espace de longueur et que  $X$  est propre (c'est-à-dire que toute boule fermée est compacte). Alors :

- (i)  $\Gamma$  est finiment engendré.
- (ii)  $\Gamma$  est quasi-isométrique à  $X$ .

*Démonstration.* (i) Comme l'action de  $\Gamma$  sur  $X$  est cocompacte, il existe  $x_0 \in X$  et  $r > 0$  tels que  $X = \Gamma \cdot B(x_0, r)$ , où  $B(x_0, r)$  est la boule ouverte dans  $X$  de centre  $x_0$  et de rayon  $r$ . Soit  $S = \{\gamma \in \Gamma, \gamma B(x_0, 3r) \cap B(x_0, 3r) \neq \emptyset\}$ . L'ensemble  $S$  est fini car  $X$  et l'action de  $\Gamma$  sur  $X$  sont propres. D'après le Lemme 1,  $S$  engendre  $\Gamma$ . Dorénavant,  $\Gamma$  est muni de la distance  $d_S$ .

(ii) On considère  $f : \gamma \in \Gamma \mapsto \gamma x_0 \in X$ . Prouvons que  $f$  est un plongement quasi-isométrique. L'idée pour cela est de comparer les chemins dans  $X$  aux mots dans  $\Gamma$ . Notons qu'il suffit de montrer l'inégalité quasi-isométrique pour 1 et  $\gamma$  : si on prend deux éléments quelconques  $g, h$  dans  $\Gamma$ , on a  $d_S(g, h) = d_S(1, g^{-1}h)$  et  $d_X(f(g), f(h)) = d_X(f(1), f(g^{-1}h))$ . On donne donc  $\gamma \in \Gamma$  et on prend  $k \in \mathbb{N}^*$  t.q.  $d_X(x_0, \gamma x_0) = (k-1)r + r'$  avec  $0 \leq r' < r$ . Comme  $X$  est un espace de longueur, il existe un chemin  $c$  de  $x_0$  à  $\gamma x_0$  de longueur  $d_X(x_0, \gamma x_0) + \varepsilon$ , avec  $0 \leq \varepsilon \leq (r - r')$ . On découpe maintenant le chemin  $c$  en  $(k-1)$  sous-chemins de longueur  $r$  et un sous-chemin de longueur  $r' + \varepsilon$  (car la longueur est additive); on note  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = \gamma x_0$  les points de  $X$  correspondant à ce découpage. Par choix de  $r$ , pour tout  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ , il existe  $\gamma_j \in \Gamma$  tel que  $d_X(x_j, \gamma_j x_0) < r$ ; on peut de plus poser  $\gamma_0 = 1$  et  $\gamma_k = \gamma$ . Ainsi, pour tout  $j \in \{0, \dots, k-1\}$ ,  $\gamma_{j+1} B(x_0, 3r) \cap \gamma_j B(x_0, 3r) \neq \emptyset$ , donc  $s_j = \gamma_j^{-1} \gamma_{j+1} \in S$ . Or  $\gamma = s_0 \cdots s_{k-1}$ , d'où :

$$d_S(1, \gamma) = \ell_S(\gamma) \leq k \leq \frac{1}{r} d_X(x_0, \gamma x_0) + 1.$$

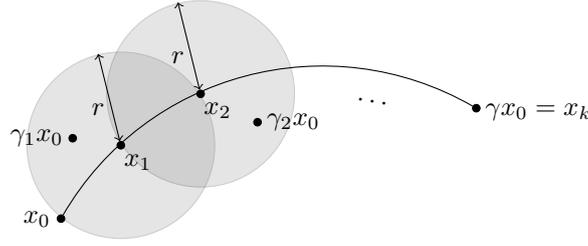


FIGURE 2 – La preuve du Lemme de Švarc-Milnor.

Reste à montrer qu'on a une inégalité dans l'autre sens. Pour cela, soit  $m = \ell_S(\gamma)$  et soit  $\gamma = s'_0 \cdots s'_{m-1}$  une expression réduite de  $\gamma$ , avec  $s'_0, \dots, s'_{m-1} \in S \cup S^{-1} = S$ . Pour  $j \in \{0, \dots, m-1\}$ , on a  $s'_j B(x_0, 3r) \cap B(x_0, 3r) \neq \emptyset$ , donc  $d_X(s'_j x_0, x_0) < 6r$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} d_X(x_0, \gamma x_0) &\leq \sum_{j=0}^{m-1} d_X(s'_0 \cdots s'_{j-1} x_0, s'_0 \cdots s'_j x_0) = \sum_{j=0}^{m-1} d_X(x_0, s'_j x_0) \\ &< 6mr = 6r \ell_S(\gamma) = 6r \cdot d_S(1, \gamma). \end{aligned}$$

Ceci prouve que  $f$  est un plongement quasi-isométrique. De plus, pour  $x \in X$ , comme  $X = \Gamma \cdot B(x_0, r)$ , il existe  $g(x) \in \Gamma$  tel que  $d_X(g(x)x_0, x) < r$ . L'application  $g : X \rightarrow \Gamma$  ainsi définie vérifie donc  $\sup_{x \in X} d_X(f \circ g(x), x) < r$ . Et on a l'inégalité suivante, pour tout  $\gamma \in \Gamma$  :

$$d_S(g \circ f(\gamma), \gamma) \leq \frac{1}{r} d_X(f \circ g \circ f(\gamma), f(\gamma)) + 1 < 2.$$

On en déduit que  $f$  est une quasi-isométrie. □

**Corollaire 1.** *Si  $\Gamma$  est un groupe engendré par un ensemble fini  $S$ , alors  $\Gamma$  est quasi-isométrique à  $\text{Cay}(\Gamma, S)$ .*

Pour illustrer la profondeur du Lemme de Švarc-Milnor, en voici maintenant une application purement algébrique :

**Proposition 3.** *Soit  $\Gamma$  un groupe finiment engendré. Alors tout sous-groupe  $H$  d'indice fini dans  $\Gamma$  est aussi finiment engendré (et quasi-isométrique à  $\Gamma$ ).*

*Démonstration.* Soit  $S$  un ensemble fini générant  $\Gamma$ . Alors  $\Gamma$  agit proprement cocompactement par isométries sur  $\text{Cay}(\Gamma, S)$ , un espace propre de longueur. Maintenant, l'action induite de  $H$  sur  $\text{Cay}(\Gamma, S)$  est aussi propre et par isométries ; elle est cocompacte car  $H$  est d'indice fini dans  $\Gamma$ . Ainsi, d'après le Lemme de Švarc-Milnor,  $H$  est finiment engendré (et quasi-isométrique à  $\text{Cay}(\Gamma, S)$ , donc à  $\Gamma$ ).  $\square$

## 4 Qu'est-ce que la courbure d'un espace métrique ?

La géométrie métrique part de l'idée que, dans un espace géodésique, on peut considérer des triangles et les comparer à des triangles dans d'autres espaces ayant plus de structure, typiquement le plan euclidien, la sphère ou le plan hyperbolique. Cette idée se révèle être d'une grande richesse ; elle permet notamment de définir une notion de courbure. Le but de ce paragraphe est d'introduire ces idées de géométrie métrique, pour montrer ensuite comme elles peuvent interagir avec la théorie des groupes.

Un espace  $\text{CAT}(0)$  est un espace métrique dont la courbure globale est négative (la terminologie, inventée par Gromov, rend hommage à Cartan, Aleksandrov et Toponogov). Informellement, c'est un espace dans lequel les triangles sont plus fins que dans le plan euclidien  $\mathbb{E}^2$ .

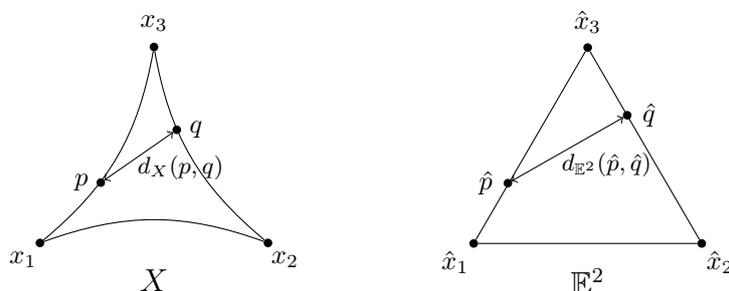


FIGURE 3 – L'inégalité  $\text{CAT}(0)$ .

Plus précisément, appelons **triangle géodésique** dans un espace métrique  $X$  la donnée de trois points  $x_1, x_2, x_3 \in X$ , avec trois **chemins géodésiques** (c'est-à-dire de longueurs minimales)  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, x_3]$  et  $[x_3, x_1]$ . Étant donné un tel triangle  $\Delta$ , il existe un triangle géodésique  $\hat{\Delta}$  dans le plan euclidien  $\mathbb{E}^2$  de sommets  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 \in \mathbb{E}^2$  tel que  $d_X(x_i, x_j) = d_{\mathbb{E}^2}(\hat{x}_i, \hat{x}_j)$  pour tous  $i, j$ . On va maintenant construire des points de comparaison pour chaque point de  $\Delta$  (identifié à la réunion de ses arêtes) : si  $p \in [x_i, x_j]$ , on définit  $\hat{p} \in [\hat{x}_i, \hat{x}_j]$  de telle sorte que  $d_X(x_i, p) = d_{\mathbb{E}^2}(\hat{x}_i, \hat{p})$ . On obtient ainsi un triangle de comparaison  $\hat{\Delta}$ , ainsi qu'une application  $\hat{\cdot} : \Delta \rightarrow \hat{\Delta}$ . On dit que le triangle  $\Delta$  satisfait l'**inégalité CAT(0)** lorsque  $d_X(p, q) \leq d_{\mathbb{E}^2}(\hat{p}, \hat{q})$

pour tous points  $p, q \in \Delta$ . On dit que  $X$  est un **espace CAT(0)** si c'est un espace géodésique dans lequel tout triangle satisfait l'inégalité CAT(0).

Voici maintenant quelques propriétés des espaces CAT(0) :

**Proposition 4.** *Soit  $X$  un espace CAT(0).*

(i) *La distance sur  $X$  est **convexe**, c'est-à-dire que pour toutes géodésiques linéairement reparamétrées  $c, c' : [0, 1] \rightarrow X$ , on a l'inégalité suivante pour tout  $t \in [0, 1]$  :*

$$d_X(c(t), c'(t)) \leq (1-t) \cdot d_X(c(0), c'(0)) + t \cdot d_X(c(1), c'(1)).$$

(ii) *L'espace  $X$  est **uniquement géodésique**, c'est-à-dire que pour tous points  $x, y \in X$ , il existe une unique géodésique paramétrée par longueur d'arc reliant  $x$  et  $y$ .*

(iii) *L'espace  $X$  est **contractile**.*

*Démonstration.* (i) On commence par supposer que  $c(0) = c'(0)$  et on considère le triangle géodésique de sommets  $c(0), c(1), c'(1)$  et dont  $c$  et  $c'$  sont des arêtes. On obtient alors l'inégalité de convexité à partir de la version euclidienne de cette même inégalité. Dans le cas général, on introduit une géodésique linéairement reparamétrée  $c'' : [0, 1] \rightarrow X$  avec  $c''(0) = c(0)$  et  $c''(1) = c'(1)$ , puis on applique ce qui précède aux couples  $(c, c'')$  et  $(c'', c')$  (avec l'orientation inversée).

(ii) Soit  $x, y \in X$ . Comme  $X$  est CAT(0), il est géodésique par définition; il suffit donc de montrer l'unicité. Soit  $c, c' : [0, \delta] \rightarrow X$  deux géodésiques paramétrées par longueur d'arc de  $x$  à  $y$ . Quitte à reparamétriser, on peut appliquer (i) pour obtenir  $c = c'$ .

(iii) On fixe un point  $\omega \in X$ . Pour  $x \in X$ , on sait d'après (ii) qu'il existe une unique géodésique linéairement reparamétrée  $c_x : [0, 1] \rightarrow X$  avec  $c_x(0) = \omega$  et  $c_x(1) = x$ . On pose alors  $H : (t, x) \in [0, 1] \times X \mapsto c_x(t) \in X$ . On a  $H(0, \cdot) = \omega$  et  $H(1, \cdot) = \text{id}_X$ ; reste à prouver que  $H$  est continue. D'après (i), on a :

$$\begin{aligned} d_X(H(t, x), H(t', x')) &\leq d_X(c_x(t), c_{x'}(t)) + d_X(c_{x'}(t), c_{x'}(t')) \\ &\leq t \cdot d_X(x, x') + (t - t') \cdot d_X(\omega, x') \\ &\leq d_X(x, x') + (t - t') \cdot d_X(\omega, x'). \end{aligned}$$

Ainsi  $H$  est continue : c'est donc une homotopie d'une application constante à  $\text{id}_X$ .  $\square$

De manière générale, on peut définir un **espace CAT( $\kappa$ )**, pour  $\kappa \in \mathbb{R}$ , comme un espace métrique dans lequel les triangles sont plus fins que dans l'espace modèle de courbure  $\kappa$  : le plan euclidien pour  $\kappa = 0$ , la sphère de dimension 2 (renormalisée) pour  $\kappa > 0$ , et le plan hyperbolique (renormalisé) pour  $\kappa < 0$ .

Soit  $\Gamma$  un groupe. On dit que  $\Gamma$  est un **groupe CAT(0)** si  $\Gamma$  agit proprement cocompactement par isométries sur un espace  $X$  qui soit CAT(0) et propre. En particulier, d'après le Lemme de Švarc-Milnor,  $\Gamma$  est finiment engendré et quasi-isométrique à  $X$ . Il faut noter que le fait d'être CAT(0) n'est pas un invariant de quasi-isométrie : par exemple, le graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$  muni du système de générateurs  $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$  n'est pas CAT(0) (car il n'est pas uniquement géodésique), pourtant il est quasi-isométrique à  $\mathbb{R}^2$  qui est un espace CAT(0). Ainsi, il ne suffit pas de regarder le graphe de Cayley d'un groupe pour savoir s'il est CAT(0). Pour montrer qu'un groupe est CAT(0), on peut être amené à généraliser le graphe de Cayley en construisant des complexes simpliciaux de dimension supérieure qui vont s'avérer être CAT(0), et sur lesquels on aura une action naturelle du groupe étudié.

## 5 Exemple d'application à un problème combinatoire

Nous allons maintenant voir comment des idées géométriques peuvent permettre de résoudre des problèmes de théorie des groupes de nature purement algébrique. Plus précisément, nous allons étudier la résolubilité de deux problèmes combinatoires, à savoir le problème des mots et le problème de conjugaison, dans les groupes  $\text{CAT}(0)$ .

Soit  $\Gamma$  un groupe muni d'une partie génératrice  $S$ . Le **problème des mots** de  $(\Gamma, S)$  consiste, étant donnés deux mots  $s_1 \cdots s_k$  et  $s'_1 \cdots s'_\ell$  du groupe libre  $F(S)$ , à déterminer si on a l'égalité  $s_1 \cdots s_k \stackrel{\Gamma}{=} s'_1 \cdots s'_\ell$ . Le **problème de conjugaison** de  $(\Gamma, S)$  consiste lui, étant donnés  $s_1 \cdots s_k$  et  $s'_1 \cdots s'_\ell$  dans  $F(S)$ , à déterminer si  $s_1 \cdots s_k$  et  $s'_1 \cdots s'_\ell$  sont conjugués dans  $\Gamma$ . On dit qu'un problème est **résoluble** s'il existe un algorithme permettant de le résoudre; ce concept est formalisé par la théorie de la calculabilité, mais nous laisserons cet aspect de côté et utiliserons une notion informelle d'algorithme.

Nous allons prouver que si un groupe  $\text{CAT}(0)$  (muni d'une partie génératrice finie) a un problème des mots résoluble, alors son problème de conjugaison est aussi résoluble. Nous aurons besoin d'un premier lemme montrant que, dans un groupe  $\text{CAT}(0)$ , si deux mots sont conjugués, alors ils le sont, dans un certain sens, de manière bornée :

**Lemme 2.** *Soit  $\Gamma$  un groupe  $\text{CAT}(0)$ . Alors pour toute partie génératrice finie  $S \subset \Gamma$ , le couple  $(\Gamma, S)$  a la **propriété de conjugaison quasi-monotone** : il existe une constante  $K \geq 1$  telle que, si deux mots  $u, v \in F(S)$  sont conjugués dans  $\Gamma$ , alors il existe un mot  $w = s_1 \cdots s_n \in F(S)$  tel que  $w^{-1}uw \stackrel{\Gamma}{=} v$  et  $\ell_S \left( (s_1 \cdots s_i)^{-1} u (s_1 \cdots s_i) \right) \leq K \max \{ \ell_S(u), \ell_S(v) \}$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ .*

*Démonstration.* Notons d'abord qu'il suffit de prouver qu'il existe une partie génératrice finie  $S \subset \Gamma$  telle que  $(\Gamma, S)$  vérifie la propriété de conjugaison quasi-monotone (d'après la Proposition 2). Soit maintenant  $X$  un espace  $\text{CAT}(0)$  propre sur lequel  $\Gamma$  agit proprement, cocompactement, par isométries. On se donne  $x_0 \in X$  et  $r > 0$  tels que  $X = \Gamma \cdot B(x_0, \frac{r}{3})$ . On pose  $S = \{ \gamma \in \Gamma, \gamma B(x_0, r+1) \cap B(x_0, r+1) \neq \emptyset \}$ . L'ensemble  $S$  est fini et il génère  $\Gamma$  d'après le Lemme 1.

Pour  $\gamma \in \Gamma$ , on considère un chemin géodésique paramétré par longueur d'arc  $c_\gamma : [0, \ell] \rightarrow X$  de  $x_0$  à  $\gamma x_0$ . Pour tout  $k \in \{1, \dots, \lceil \ell \rceil - 1\}$ , il existe  $w_k \in \Gamma$  tel que  $d_X(c_\gamma(k), w_k x_0) < \frac{r}{3}$ . On pose de plus  $w_0 = 1$  et  $w_{\lceil \ell \rceil} = \gamma$ ; ainsi, en notant  $s_k = w_{k-1}^{-1} w_k$  pour  $k \in \{1, \dots, \lceil \ell \rceil\}$ , on a  $s_k \in S$  et on pose :

$$\sigma_\gamma \stackrel{F(S)}{=} s_1 \cdots s_{\lceil \ell \rceil} \stackrel{\Gamma}{=} \gamma.$$

D'après le Lemme de Švarc-Milnor, il existe  $\lambda \geq 1$  et  $\varepsilon \geq 0$  tels que l'application  $\gamma \mapsto \gamma x_0$  est un plongement  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasi-isométrique (c'est-à-dire qu'il vérifie l'inégalité de la Section 2).

Soit maintenant  $u, v \in F(S)$  tels qu'il existe  $\gamma \in \Gamma$  avec  $\gamma^{-1}u\gamma \stackrel{\Gamma}{=} v$ . On considère les chemins géodésiques paramétrés par longueur d'arc  $c_\gamma : [0, \ell] \rightarrow X$  et  $c'_\gamma = uc_\gamma$  joignant respectivement  $x_0$  à  $\gamma x_0$  et  $ux_0$  à  $u\gamma x_0 = \gamma v x_0$ . On pose  $w \stackrel{F(S)}{=} \sigma_\gamma \stackrel{F(S)}{=} s_1 \cdots s_m$ , avec  $m = \lceil \ell \rceil$ . On a bien

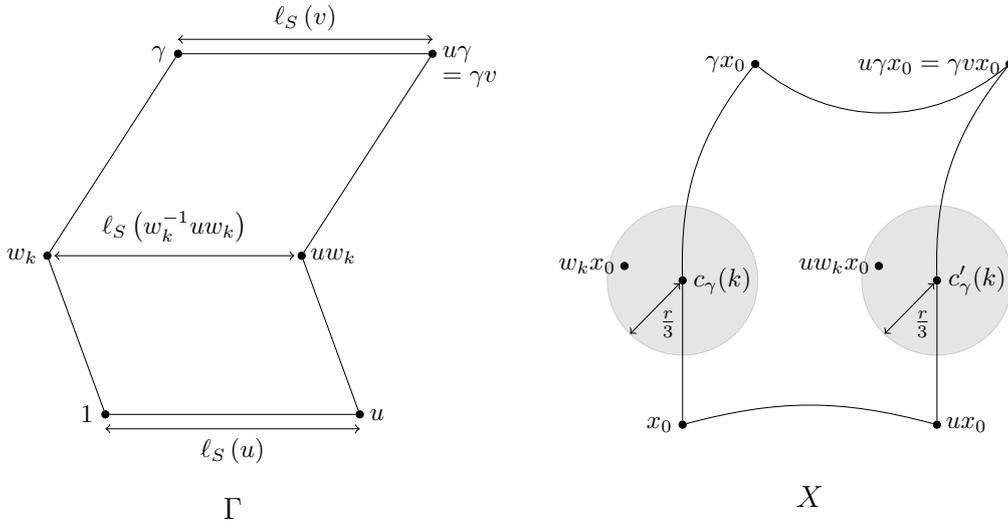


FIGURE 4 – La propriété de conjugaison quasi-monotone dans un groupe  $CAT(0)$ .

$w^{-1}uw \stackrel{\Gamma}{=} \gamma^{-1}u\gamma \stackrel{\Gamma}{=} v$ . De plus, pour  $k \in \{1, \dots, m\}$ , si  $w_k = s_1 \cdots s_k$ , alors :

$$\begin{aligned}
 \ell_S(w_k^{-1}uw_k) &\leq \lambda d_X(w_kx_0, uw_kx_0) + \lambda\varepsilon \leq \lambda d_X(c_\gamma(k), c'_\gamma(k)) + \lambda\varepsilon + \frac{2}{3}\lambda r \\
 &\leq \lambda \max\{d_X(c_\gamma(0), c'_\gamma(0)), d_X(c_\gamma(\ell), c'_\gamma(\ell))\} + \lambda\varepsilon + \frac{2}{3}\lambda r \\
 &\quad \text{car } X \text{ est } CAT(0), \text{ donc } d_X \text{ est convexe} \\
 &\leq \lambda^2 \max\{\ell_S(u), \ell_S(v)\} + 2\lambda\varepsilon + \frac{2}{3}\lambda r \leq K \max\{\ell_S(u), \ell_S(v)\} \\
 &\quad \text{avec } K = \lambda^2 + 2\lambda\varepsilon + \frac{2}{3}\lambda r. \quad \square
 \end{aligned}$$

Remarquons de plus que la constante  $K$  de conjugaison quasi-monotone s'exprime en fonction des constantes  $\lambda, \varepsilon$  de quasi-isométrie de la fonction  $\gamma \mapsto \gamma x_0$ . La preuve du Lemme de Švarc-Milnor montre que ces constantes s'expriment en fonction du rayon  $r$  d'une boule telle que  $X = \Gamma \cdot B(x_0, r)$ . Il faut aussi tenir compte du fait que, lorsqu'on passe de la partie génératrice  $S$  spécifiée par la démonstration à une partie génératrice  $S'$  quelconque, la constante  $K$  va être remplacée par  $(2\lambda + \lambda^2 K)$ , où  $\lambda$  est comme dans la preuve de la Proposition 2. En utilisant le Lemme de Švarc-Milnor, la constante  $\lambda$  peut être majorée en fonction de  $r$ , à condition de connaître  $d_X(x_0, s'x_0)$  pour tout  $s' \in S'$ . En pratique, l'espace  $X$  est souvent construit comme un complexe cellulaire dont le 1-squelette est le graphe de Cayley associé à la partie génératrice  $S'$  qui nous intéresse, et il existe alors un choix naturel de  $x_0$  tel qu'on ait  $d_X(x_0, s'x_0) = 1$  pour tout  $s' \in S'$ . On dira alors que  $S'$  est une **partie génératrice normalisée** relativement à  $X$ . Ainsi, on peut renforcer le résultat précédent comme suit :

**Remarque 3.** Soit  $\Gamma$  un groupe  $CAT(0)$ . On note  $X$  l'espace  $CAT(0)$  sur lequel  $\Gamma$  agit. Alors pour toute partie génératrice finie et normalisée  $S \subset \Gamma$ , le couple  $(\Gamma, S)$  a la propriété de conjugaison quasi-monotone pour une constante  $K$  qui est calculable algorithmiquement à condition de connaître le rayon d'une boule dont les translatés couvrent  $X$ .

**Lemme 3.** *Soit  $\Gamma$  un groupe muni d'une partie génératrice finie  $S$ . On suppose que  $(\Gamma, S)$  a un problème des mots résoluble, et vérifie la propriété de conjugaison quasi-monotone avec une constante  $K$  calculable. Alors  $(\Gamma, S)$  a un problème de conjugaison résoluble.*

*Démonstration.* On fixe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme le problème des mots de  $(\Gamma, S)$  est résoluble, on peut construire algorithmiquement un graphe (fini)  $\mathcal{G}_n$  de sommets  $V_n = \{w \in F(S), \ell_S(w) \leq n\}$  et d'arêtes  $E_n = \{\{w, w'\} \subset V_n, \exists s \in S \cup S^{-1}, w' = sws^{-1}\}$ . Notons maintenant que, si  $u, v \in F(S)$ , alors d'après la propriété de conjugaison quasi-monotone,  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $\Gamma$  si et seulement s'il existe un chemin de  $u$  à  $v$  dans le graphe  $\mathcal{G}_n$ , où  $n$  est choisi tel que  $n \geq K \max\{\ell_S(u), \ell_S(v)\}$ . Ainsi, on peut décider algorithmiquement si  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $\Gamma$ .  $\square$

En rassemblant les résultats ci-dessus, on aboutit au théorème suivant :

**Théorème 3.** *Soit  $\Gamma$  un groupe  $CAT(0)$ . On note  $X$  l'espace  $CAT(0)$  sur lequel  $\Gamma$  agit et on suppose  $\Gamma$  muni d'une partie génératrice finie et normalisée  $S$ . On suppose que  $(\Gamma, S)$  a un problème des mots résolubles et qu'on peut déterminer le rayon d'une boule dont les translatés couvrent  $X$ . Alors  $(\Gamma, S)$  a un problème de conjugaison résoluble.*

## Conclusion

Nous avons donné un petit aperçu de l'univers qui s'ouvre lorsqu'on regarde les groupes comme des objets géométriques. Les notions de courbure des groupes sont en fait bien plus larges que ce que nous avons présenté : on peut s'intéresser aux groupes  $CAT(\kappa)$  pour des valeurs de  $\kappa \neq 0$ , et une autre notion importante est celle d'hyperbolicité au sens de Gromov, plus faible que la propriété  $CAT(-1)$ , mais qui a la caractéristique remarquable d'être un invariant de quasi-isométrie. En fait, une partie importante de la théorie géométrique des groupes consiste à rechercher de tels invariants. Le lecteur souhaitant avoir un panorama de quelques idées de théorie géométrique des groupes pourra consulter [LH00]. Pour un exposé plus linéaire, on pourra se référer à [Sis14], qui donne une introduction relativement informelle mais très visuelle, ou bien à [Lö17] pour un texte plus détaillé.

## Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement Caterina Campagnolo, du Karlsruher Institut für Technologie, pour sa relecture attentive et ses remarques mathématiques. Elle m'a permis de beaucoup apprendre, d'abord sur la théorie géométrique des groupes en général au cours de mon stage, puis sur les problèmes de calculabilité en particulier lors de l'échange que nous avons eu à l'occasion de la rédaction de cet article.

## Références

- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 319. Springer, Berlin, 1999.
- [Bow06] Brian H. Bowditch. *A Course on Geometric Group Theory*. MSJ memoirs, Vol. 16. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2006. Disponible sur <https://homepages.warwick.ac.uk/~masgak/>.

- [DM99] Michael W. Davis and Gábor Moussong. Notes on nonpositively curved polyhedra. In K. Boroczky, W. Neumann, and A. Stipicz, editors, *Low Dimensional Topology*, Bolyai Society mathematical studies, Vol. 8, pages 11–94. Janos Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1999. Disponible sur <https://people.math.osu.edu/davis.12/>.
- [LH00] Pierre de La Harpe. *Topics in Geometric Group Theory*. Chicago lectures in mathematics. University of Chicago Press, Chicago (Ill.), 2000.
- [Lö17] Clara Löh. *Geometric Group Theory. An Introduction*. Universitext. Springer, Berlin, 2017. Disponible sur <http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/>.
- [Sau02] Roman Sauer.  *$L^2$ -invariants of groups and discrete measured groupoids*. PhD thesis, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, 2002. Disponible sur <https://miami.uni-muenster.de/Record/cf45a284-433f-46e1-82a9-db806727a376>.
- [Sch17] Petra Schwer. *Lectures on  $CAT(0)$  Groups and Geometry*. 2017. Disponible sur <http://www.math.kit.edu/iag2/~schwer/>.
- [Sis14] Alessandro Sisto. *Lecture Notes on Geometric Group Theory*. 2014. Disponible sur <http://www.math.ethz.ch/~alsisto/>.