

# AUTOMORPHISMES EXTÉRIEURS DE PRODUITS LIBRES : REVÊTEMENTS ABÉLIENS CARACTÉRISTIQUES ET REPRÉSENTATIONS LIBRES

Alexis Marchand

## Résumé

Pour un produit libre  $G$ , on s'intéresse à l'existence de représentations libres fidèles du groupe des automorphismes extérieurs  $\text{Out}(G)$ , c'est-à-dire de plongements de  $\text{Out}(G)$  dans  $\text{Out}(F_m)$  pour un entier  $m$ . Pour cela, on se base sur des travaux de Bridson et Vogtmann qui construisent des plongements de  $\text{Out}(F_n)$  dans  $\text{Out}(F_m)$  pour certaines valeurs de  $n$  et  $m$  en interprétant  $\text{Out}(F_n)$  comme le groupe des équivalences d'homotopie d'un graphe  $X$  de genre  $n$ , et en relevant les équivalences d'homotopie de  $X$  à un revêtement abélien caractéristique de genre  $m$ . Afin d'adapter leur méthode au cas des produits libres, on utilise une notion de représentation arboréale, qui est une manière de comprendre les graphes de groupes par le biais de l'action du groupe fondamental sur l'arbre de Serre. On traduit des notions d'équivalences d'homotopie et de revêtements pour les représentations arboréales et on les relie au groupe  $\text{Out}(G)$ . En utilisant ces notions, ainsi qu'une présentation de  $\text{Out}(G)$  due à Fuchs-Rabinovich, on montre par exemple que  $\text{Out}(G)$  admet une représentation libre fidèle lorsque  $G = F_d * G_{d+1} * \cdots * G_n$ , avec  $F_d$  libre de rang  $d$  et  $G_i$  abélien fini d'ordre premier avec  $n - 1$ . Ceci implique en particulier que  $\text{Out}(G)$  satisfait l'alternative de Tits, car  $\text{Out}(F_m)$  la satisfait.

Mémoire de Master

Encadré par François Dahmani

Institut Fourier, Grenoble

2021

# Introduction

Étant donné un groupe  $G$ , on note  $\text{Aut}(G)$  le groupe des automorphismes de  $G$ . On considère le sous-groupe normal  $\text{Inn}(G)$  constitué des conjugaisons par les éléments de  $G$  et on s'intéresse au quotient

$$\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G).$$

Le groupe  $\text{Out}(G)$  est appelé *groupe des automorphismes extérieurs* de  $G$ .

L'étude de  $\text{Out}(F_n)$ , où  $F_n$  est le groupe libre de rang  $n$ , a pris une grande ampleur à la suite des travaux de Culler et Vogtmann [5] qui ont introduit le concept d'outre-espace, un analogue pour les graphes de l'espace de Teichmüller d'une surface, et sur lequel agit  $\text{Out}(F_n)$ . Une piste de généralisation naturelle consiste à étudier  $\text{Out}(G)$  dans le cas où  $G$  est un produit libre. Citons dans cette direction la construction d'un outre-espace associé à un produit libre par Guirardel et Levitt [12].

Une stratégie possible d'étude de  $\text{Out}(G)$  est de tenter de le plonger dans un groupe mieux compris, par exemple dans  $\text{Out}(F_n)$ . Suivant la terminologie introduite par Kielak [14], et par analogie avec la notion de représentation linéaire, un tel morphisme d'un groupe  $\Gamma$  dans  $\text{Out}(F_n)$  sera appelé une *représentation libre* de  $\Gamma$ .

On peut espérer que l'existence de représentations libres fidèles d'un groupe permette d'étendre à ce groupe des propriétés de  $\text{Out}(F_n)$ . Par exemple, Bestvina, Feighn et Handel [2] ont montré que  $\text{Out}(F_n)$  satisfait l'alternative de Tits : tout sous-groupe de  $\text{Out}(F_n)$  est virtuellement résoluble ou contient un sous-groupe libre non abélien. On peut reformuler ce résultat comme suit.

**Théorème** (Bestvina-Feighn-Handel [2]). *Si un groupe  $\Gamma$  admet une représentation libre fidèle, alors il satisfait l'alternative de Tits, c'est-à-dire que tout sous-groupe de  $\Gamma$  est soit virtuellement résoluble, soit contient un sous-groupe libre non abélien.*

Cette formulation souligne l'analogie avec le résultat originel dû à Tits [19], selon lequel tout groupe linéaire (autrement dit tout groupe admettant une représentation linéaire fidèle) satisfait l'alternative de Tits. Le Théorème de Bestvina-Feighn-Handel est donc un résultat structurel fort pour les groupes admettant des représentations libres fidèles, parallèlement au cas des groupes linéaires.

Collins [4] a par ailleurs montré que, si  $G$  est un produit libre d'un nombre fini de groupes finis, alors il existe un sous-groupe libre  $F$  d'indice fini dans  $G$  tel que le quotient  $\text{Aut}(G)/\text{Inn}(F)$  se plonge dans  $\text{Out}(F)$ . Ceci permet à Collins d'utiliser les résultats cohomologiques de Culler et Vogtmann [5] sur  $\text{Out}(F_n)$  pour déduire que  $\text{Out}(G)$  est virtuellement sans torsion et de dimension cohomologique virtuelle finie.

Ces résultats montrent l'intérêt qu'il peut y avoir à construire des représentations libres fidèles de groupes. Nous nous attachons donc dans ce qui suit à ce problème pour le groupe  $\text{Out}(G)$ , où  $G$  est un produit libre.

Pour cela, nous nous inspirons des travaux de Bridson et Vogtmann [3], dans lesquels ils étudient l'existence de plongements  $\text{Out}(F_n) \hookrightarrow \text{Out}(F_m)$  pour certaines valeurs de  $n$  et  $m$ . Leur méthode consiste à voir  $F_n$  comme le groupe fondamental d'un graphe  $X$  de genre  $n$  et à analyser certains revêtements abéliens caractéristiques  $p : \hat{X} \rightarrow X$  avec  $\pi_1 \hat{X} \cong F_m$ . Dans ce contexte,  $\text{Out}(F_n)$  peut être interprété comme le groupe  $\text{HE}(X)$  des équivalences d'homotopie de  $X$  à homotopie près, et Bridson et Vogtmann [3] montrent que, si  $m = r^n(n-1) + 1$ , avec  $r$  premier avec  $n-1$ , alors il existe un plongement  $\text{Out}(F_n) \hookrightarrow \text{Out}(F_m)$  obtenu en relevant les équivalences d'homotopie de  $X$  au revêtement  $\hat{X}$ . Nous expliquons plus en détails la méthode de Bridson et Vogtmann dans le Chapitre 1.

Notre but est ensuite d'appliquer cette méthode en remplaçant le groupe libre  $F_n$  par un produit libre  $G$ . Dans ce cas,  $G$  devient le groupe fondamental d'un graphe de groupes  $\mathbb{X}$ . Notre première étape consistera donc à donner un sens aux notions d'homotopie et de revêtements pour les graphes de groupes. Suivant l'idée de Guirardel et Levitt [12], nous changerons de point de vue et nous focaliserons non pas sur la structure de graphe de groupes de  $\mathbb{X}$ , mais sur l'action de  $G$  sur un revêtement universel  $\tilde{X}$  (au sens des graphes de groupes). Notre objet fondamental est donc un arbre,  $\tilde{X}$ , muni de l'action du groupe  $G$ . C'est cet objet que nous appellerons *représentation arboréale* de  $G$ , et que nous étudierons dans le Chapitre 2, dans le but de formaliser le lien entre les équivalences d'homotopie des représentations arboréales de  $G$  et la structure algébrique de  $\text{Out}(G)$ .

Nous pourrons ensuite utiliser la méthode de Bridson et Vogtmann pour construire des plongements  $\text{Out}(G) \hookrightarrow \text{Out}(N)$ , pour certains choix d'un produit libre  $G$  et d'un sous-groupe  $N$  correspondant à un revêtement abélien caractéristique d'une représentation arboréale de  $G$ . Ce sera l'objet du Chapitre 3. Les résultats principaux seront les suivants.

**Théorèmes A et B.** Soit  $G = F_d * G_{d+1} * \cdots * G_n$ , avec  $n \geq 2$ ,  $F_d$  libre de rang  $d$ ,  $G_{d+1}, \dots, G_n$  abéliens non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ .

- (A) Si  $d = 0$ , on se donne, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , un entier  $r_i \in \mathbb{Z}$  premier avec  $n-1$ , de telle sorte que  $r_i = r_j$  dès que  $G_i \cong G_j$ . Si  $N = G'G_1^{r_1} \cdots G_n^{r_n}$ , alors il existe un plongement  $\text{Out}(G) \hookrightarrow \text{Out}(N)$ .
- (B) En général, on se donne un entier  $r \in \mathbb{Z}$  premier avec  $n-1$ . Si  $N = G'G^r$ , alors il existe un plongement  $\text{Out}(G) \hookrightarrow \text{Out}(N)$ .

On s'intéresse particulièrement aux cas où  $N$  est libre de rang fini, car ils donnent des représentations libres fidèles de  $\text{Out}(G)$ . On obtient par exemple les deux corollaires suivants.

**Corollaire B1.** Soit  $G = F_d * G_{d+1} * \cdots * G_n$ , avec  $n \geq 2$ ,  $F_d$  libre de rang  $d$ ,  $G_{d+1}, \dots, G_n$  abéliens finis. On suppose que  $n-1$  est premier avec l'ordre  $|G_i|$  de chaque facteur  $G_i$ . Alors il existe un sous-groupe libre  $F$  de rang fini et d'indice fini dans  $G$  tel qu'on ait un plongement

$$\text{Out}(G) \hookrightarrow \text{Out}(F).$$

En particulier,  $\text{Out}(G)$  admet une représentation libre fidèle.

**Corollaire B2.** Soit  $G = F_d * G_{d+1} * \cdots * G_n$ , avec  $F_d$  libre de rang  $d$ ,  $G_{d+1}, \dots, G_n$  abéliens finis. Alors il existe un entier  $k \geq 0$  tel que  $\text{Out}(F_k * G)$  admette une représentation libre fidèle.

Il s'ensuit d'après le Théorème de Bestvina-Feighn-Handel que  $\text{Out}(G)$  satisfait l'alternative de Tits lorsque  $G$  est un produit libre vérifiant les hypothèses du Corollaire B1. Horbez [13] a prouvé plus généralement que, si  $G = F_d * G_{d+1} * \cdots * G_n$ , avec  $G_i$  librement

indécomposable tel que  $G_i$  et  $\text{Out}(G_i)$  satisfont l'alternative de Tits, alors  $\text{Out}(G)$  satisfait aussi l'alternative de Tits. On obtient donc une nouvelle preuve du résultat de Horbez dans le cas particulier des produits libres vérifiant les hypothèses du Corollaire B1.

**Remerciements.** Je tiens à remercier François Dahmani d'avoir proposé ce sujet de mémoire et d'avoir encadré mon travail. Les nombreuses discussions que nous avons eues m'ont indéniablement permis d'avancer et de faire de ce mémoire ce qu'il est. J'ai pris un grand plaisir, que j'espère faire partager au lecteur, à comprendre de nouvelles idées mathématiques.

# Table des matières

<b>Notations et préliminaires</b>	<b>6</b>
<b>1 La méthode de Bridson-Vogtmann</b>	<b>8</b>
1.1 Interprétation topologique des automorphismes extérieurs . . . . .	8
1.2 Construction de représentations libres de $\text{Out}(F_n)$ . . . . .	9
1.3 Optimalité de la construction . . . . .	11
<b>2 Représentations arboréales, équivalences d'homotopie et revêtements</b>	<b>14</b>
2.1 Notion de représentation arboréale . . . . .	14
2.2 Équivalences d'homotopie et réduction . . . . .	15
2.3 Suite exacte de Birman . . . . .	18
2.4 Revêtements normaux et groupe de Galois . . . . .	19
2.5 Équivalences d'homotopie préservant les fibres . . . . .	20
2.6 Contractibilité des représentations arboréales . . . . .	22
2.7 Revêtements caractéristiques . . . . .	22
<b>3 Représentations libres du groupe d'automorphismes extérieurs</b>	<b>25</b>
3.1 Revêtements abéliens associés à un produit libre . . . . .	25
3.2 Générateurs et relations de $\text{Out}(G)$ . . . . .	27
3.3 Relèvement des équivalences d'homotopie . . . . .	29
3.4 Plongement de $\text{Out}(G)$ dans $\text{Out}(N)$ . . . . .	30
3.5 Générateurs et relations avec un facteur libre . . . . .	32
3.6 Résultats de plongements avec un facteur libre . . . . .	34
3.7 Application aux groupes de Coxeter universels . . . . .	35
<b>Références</b>	<b>38</b>

# Notations et préliminaires

**Graphes et arbres.** On travaille avec la définition de graphe utilisée par Serre dans [18] : un *graphe* est un quadruplet  $X = (V(X), \vec{E}(X), o_X, \iota_X)$ , où  $V(X)$  est un ensemble, dit de *sommets*,  $\vec{E}(X)$  est un ensemble, dit d'*arcs*,  $o_X : \vec{E}(X) \rightarrow V(X)$  est l'application origine et  $\iota_X : \vec{E}(X) \rightarrow \vec{E}(X)$  est une involution sans point fixe (on notera  $\bar{e} = \iota_X(e)$ ). Une *arête* de  $X$  est une paire  $\{e, \bar{e}\}$ , pour  $e \in \vec{E}(X)$ . Un *chemin* dans  $X$  est une suite alternée de sommets et d'arcs

$$c = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k),$$

avec  $k \geq 0$ ,  $v_i = o_X(e_i) = o_X(\bar{e}_{i-1})$ . On pose  $o_X(c) = v_0$ . On a un chemin inverse donné par

$$\bar{c} = \iota_X(c) = (v_k, \bar{e}_k, v_{k-1}, \dots, v_2, \bar{e}_2, v_1, \bar{e}_1, v_0).$$

On note  $P(X)$  l'ensemble des chemins de  $X$ . On fera parfois l'abus d'écrire  $v \in X$  plutôt que  $v \in V(X)$ .

Si  $X, Y$  sont deux graphes, un *morphisme*  $f : X \rightarrow Y$  est la donnée d'applications  $f_V : V(X) \rightarrow V(Y)$  et  $f_{\vec{E}} : \vec{E}(X) \rightarrow P(Y)$  telles que  $o_Y \circ f_{\vec{E}} = f_V \circ o_X$  et  $\iota_Y \circ f_{\vec{E}} = f_{\vec{E}} \circ \iota_X$ . Noter qu'on autorise un morphisme à envoyer une arête sur un chemin, y compris de longueur nulle (qui correspond alors à un sommet).

Le graphe  $X$  est dit *connexe* si pour tous  $u, v \in V(X)$ , il existe  $c \in P(X)$  tel que  $o_X(c) = u$  et  $o_X(\bar{c}) = v$ .

Un chemin  $c = (v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$  est dit *réduit* lorsque  $e_i \neq \bar{e}_{i-1}$  pour tout  $i$ . Un *lacet* est un chemin  $c$  tel que  $o_X(c) = o_X(\bar{c})$ . Un *arbre* est un graphe connexe sans lacet réduit.

Observons qu'un morphisme réduit d'arbres (tel que l'image de tout arc est un chemin réduit) est caractérisé par les images des sommets. On définira donc souvent un morphisme d'arbres sans spécifier les images des arcs, avec l'hypothèse implicite que le morphisme construit est choisi réduit.

**Groupe fondamental d'un graphe.** La théorie du groupe fondamental et des revêtements des graphes peut être obtenue de deux manières équivalentes. La première est topologique : un graphe peut être muni d'une structure d'espace topologique en prenant une copie du segment unité  $[0, 1]$  pour chaque arête, et en les recollant selon les extrémités communes. On obtient ainsi les notions de groupe fondamental et de revêtements pour les graphes comme cas particuliers du cadre général topologique.

Le second point de vue, plus proche de ce qui suit, est combinatoire. Il consiste à définir l'homotopie de chemins dans un graphe comme la relation d'équivalence générée par la suppression des aller-retours (c'est-à-dire que tout sous-chemin de la forme  $(v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \bar{e}_{i+1}, v_i)$  peut être remplacé par  $(v_i)$ ), et à définir le groupe fondamental en un sommet  $v_0$  comme groupe des classes d'homotopie de lacets en  $v_0$  pour l'opération

de concaténation. Un revêtement est un morphisme de graphes qui est surjectif sur les sommets et qui induit des bijections sur les voisinages des sommets.

**Action par conjugaison et automorphismes extérieurs.** Étant donné un groupe  $G$  et un élément  $\gamma \in G$ , on a un automorphisme  $\text{ad}(\gamma) \in \text{Aut}(G)$  défini par

$$\text{ad}(\gamma) : g \mapsto \gamma g \gamma^{-1}.$$

L'application  $\gamma \mapsto \text{ad}(\gamma)$  définit un morphisme de groupes

$$\text{ad} : G \rightarrow \text{Aut}(G).$$

Ce morphisme est injectif lorsque  $G$  a un centre trivial. Le groupe des *automorphismes intérieurs* de  $G$  est le sous-groupe normal  $\text{Inn}(G) = \text{ad}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$  et le groupe des *automorphismes extérieurs* est le quotient  $\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$ .

Un sous-groupe  $N$  de  $G$  est dit *normal* s'il est stabilisé par tous les automorphismes intérieurs de  $G$ ;  $N$  est dit *caractéristique* s'il est stabilisé par tous les automorphismes de  $G$ .

Lorsqu'on écrira une flèche  $G \rightarrow \text{Aut}(G)$  sans plus de précision, celle-ci désignera toujours le morphisme  $\text{ad}$ .

**Théorème de Grushko.** Le théorème fondamental pour la suite est un résultat de rigidité des produits libres. Ce résultat est souvent combiné avec l'existence des décompositions en produits libres et formulé comme suit.

**Théorème (Grushko).** *Si  $G$  est un groupe de type fini, alors il existe des groupes librement indécomposables  $G_1, \dots, G_m$  non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ , et un groupe libre  $F_r$  de rang  $r \geq 0$  tel que*

$$G = G_1 * \dots * G_m * F_r.$$

*De plus, si on a une autre décomposition  $G = H_1 * \dots * H_n * F_s$  avec  $H_1, \dots, H_n$  librement indécomposables non isomorphes à  $\mathbb{Z}$  et  $F_s$  libre de rang  $s$ , alors  $m = n$ ,  $r = s$ , et il existe une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_m$  et des éléments  $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in G$  tels que  $H_i = \gamma_i G_{\sigma(i)} \gamma_i^{-1}$  pour tout  $i$ .*

En fait, nous n'aurons besoin dans la suite que de l'unicité de la décomposition. Il semblerait que la parenté du résultat d'unicité doive être attribuée à Kurosh, qui l'appelle *Isomorphiesatz* dans [15]. Il s'obtient comme corollaire du *Untergruppensatz* de Kurosh (voir [15]), au moins dans le cas où  $G$  n'a pas de facteur libre. L'argument original est de nature combinatoire, mais le *Untergruppensatz* peut être prouvé simplement à l'aide de la théorie de Bass-Serre (voir le livre de Serre [18, § I.5.5]).

La contribution de Grushko [11] fut de montrer l'additivité du rang (si  $\text{rg}(G)$  est le nombre minimal de générateurs de  $G$ , alors  $\text{rg}(A * B) = \text{rg } A + \text{rg } B$ ). L'existence de la décomposition découle alors immédiatement.

# Chapitre 1

## La méthode de Bridson-Vogtmann

### 1.1 Interprétation topologique des automorphismes extérieurs

L'idée clé de Bridson et Vogtmann pour étudier l'existence de plongements de  $\text{Out}(F_n)$  dans [3] est une interprétation topologique de ce groupe. Considérons pour cela un graphe  $X$  de genre  $n$ , de sorte que le groupe fondamental  $F = \pi_1 X$  est isomorphe au groupe libre  $F_n$  de rang  $n$ . Étant donnée une équivalence d'homotopie  $f : X \rightarrow X$  à point base fixé, on obtient un automorphisme  $f_* \in \text{Aut}(F)$  par action sur le groupe fondamental. Si on n'impose pas à  $f$  de fixer un point base, l'automorphisme  $f_*$  n'est défini qu'à composition par une conjugaison près, et peut donc être vu comme un élément de  $\text{Out}(F)$ . En notant  $\text{HE}(X)$  le groupe des équivalences d'homotopie de  $X$  à homotopie près, ceci définit un morphisme de groupes

$$\text{HE}(X) \rightarrow \text{Out}(F).$$

Comme  $X$  est un graphe, ce morphisme est en fait un isomorphisme.

Introduisons maintenant un revêtement  $p : \hat{X} \rightarrow X$ . Alors  $\hat{X}$  est aussi un graphe, donc  $N = \pi_1 \hat{X}$  est un groupe libre, et  $\text{HE}(\hat{X}) \cong \text{Out}(N)$ . En fait, on peut relier plus précisément les automorphismes de  $F$  à ceux de  $N$ . On a besoin à cette fin de la notion suivante.

**Définition 1.1.** Soit  $p : \hat{X} \rightarrow X$  un revêtement d'espaces topologiques. On dit qu'une application  $f : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$  préserve les fibres de  $p$  si pour tout  $x \in X$ , il existe  $y \in X$  tel que  $f(p^{-1}(x)) \subseteq p^{-1}(y)$ .

Deux applications préservant les fibres  $f_0, f_1 : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$  sont dites homotopes suivant les fibres s'il existe une homotopie  $f_\bullet : [0, 1] \times \hat{X} \rightarrow \hat{X}$  entre  $f_0$  et  $f_1$  telle que  $f_t : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$  préserve les fibres pour tout  $t \in [0, 1]$ .

On note  $\text{FHE}(p)$  le groupe des équivalences d'homotopie de  $\hat{X}$  préservant les fibres de  $p$ , à homotopie suivant les fibres près.

Le bon contexte pour ce qui suit est celui où  $p$  est un revêtement caractéristique. Rappelons qu'un sous-groupe  $H$  d'un groupe  $G$  est caractéristique s'il est stable par tous les automorphismes de  $G$ , et que le revêtement  $p : \hat{X} \rightarrow X$  est caractéristique si  $p_* \pi_1 \hat{X}$  est un sous-groupe caractéristique de  $\pi_1 X$ . Cela renforce la notion de sous-groupe normal et de revêtement normal. Un revêtement normal (et donc en particulier un revêtement caractéristique) a un groupe de Galois, qu'on notera  $\text{Deck}(p)$ , et qui est isomorphe à  $\pi_1 X / p_* \pi_1 \hat{X}$ .

Le résultat suivant est le point de départ de la méthode de Bridson et Vogtmann (c'est la Proposition 1 de [3]). Nous donnerons dans le Chapitre 2 de ce rapport une preuve de cette proposition dans le cadre plus général des représentations arboréales (nous reprendrons essentiellement la preuve de Bridson et Vogtmann, mais en utilisant un formalisme combinatoire plutôt que topologique).

**Proposition 1.2.** *Soit  $p : \hat{X} \rightarrow X$  un revêtement caractéristique de graphes. On note  $F = \pi_1 X$  et  $N = \pi_1 \hat{X}$ . Si le centralisateur de  $N$  dans  $F$  est trivial, alors on a une équivalence de suites exactes :*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & F/N & \longrightarrow & \text{Aut}(F)/N & \longrightarrow & \text{Out}(F) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & \text{Deck}(p) & \longrightarrow & \text{FHE}(p) & \longrightarrow & \text{HE}(X) \longrightarrow 1 \end{array}$$

À partir de cette observation, la construction d'un scindement  $\text{HE}(X) \hookrightarrow \text{FHE}(p)$ , ou en termes plus topologiques le relèvement à  $\hat{X}$  des équivalences d'homotopie de  $X$ , se traduit par l'existence d'un scindement  $\text{Out}(F) \hookrightarrow \text{Aut}(F)/N$ . Or, comme  $N$  est caractéristique dans  $F$ , on dispose d'un morphisme  $\text{Aut}(F) \rightarrow \text{Aut}(N)$  défini par restriction des automorphismes, ce qui permettra dans certains cas d'obtenir par composition un plongement  $\text{Out}(F) \hookrightarrow \text{Aut}(F)/N \hookrightarrow \text{Aut}(N)/N = \text{Out}(N)$ .

## 1.2 Construction de représentations libres de $\text{Out}(F_n)$

S'appuyant sur ce lien entre algèbre et topologie, Bridson et Vogtmann considèrent comme graphe  $X$  la rose à  $n$  pétales (qui a donc un groupe fondamental isomorphe à  $F_n$ ), et s'intéressent aux revêtements caractéristiques  $p : \hat{X} \rightarrow X$  et  $p_r : \hat{X}_r \rightarrow X$  de groupes fondamentaux respectifs  $N = F'_n$  et  $N_r = F'_n F_n^r$  où  $F'_n$  est le sous-groupe dérivé de  $F_n$  (c'est-à-dire le sous-groupe engendré par les commutateurs) et  $r \in \mathbb{Z}$  est un entier à fixer. Remarquons que le revêtement  $p : \hat{X} \rightarrow X$  a pour groupe de Galois l'abélianisé de  $\pi_1 X$ ; il est appelé *revêtement abélien maximal* de  $X$ . Ainsi,  $\hat{X}$  a une géométrie très simple : c'est la grille  $\mathbb{Z}^n$ , qu'on pourra voir comme plongée dans  $\mathbb{R}^n$ , ce dernier étant muni d'une base  $(e_1, \dots, e_n)$ , telle que, si  $(a_1, \dots, a_n)$  est une base libre de  $F_n$ , alors l'action du groupe de Galois  $\text{Deck}(p) \cong F_n/N$  sur  $\hat{X} = \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$  est donnée par le fait que  $a_i$  agit comme une translation dans la direction  $e_i$ . Le revêtement  $\hat{X}_r$  est simplement obtenu en regardant  $\hat{X}$  modulo  $r$ ; c'est donc un tore  $(\mathbb{Z}/r)^n$ .

Pour relever les équivalences d'homotopie de  $X$  à  $\hat{X}_r$ , Bridson et Vogtmann utilisent une présentation du groupe  $\text{HE}(X) \cong \text{Out}(F_n)$  tirée des travaux de Gersten [9]. Sans donner le détail des relations de Gersten, indiquons au moins quels générateurs sont utilisés. Pour cela, on munit  $F_n$  d'une base libre  $(a_1, \dots, a_n)$ . Les générateurs de Gersten sont alors :

- Les *transvections à droite*  $\rho_{ij}$  (avec  $i \neq j$ ), données par  $a_j \mapsto a_j a_i$  et  $a_k \mapsto a_k$  pour  $k \neq j$ ,
- Les *transvections à gauche*  $\lambda_{ij}$  (avec  $i \neq j$ ), données par  $a_j \mapsto a_i a_j$  et  $a_k \mapsto a_k$  pour  $k \neq j$ ,
- La *réflexion*  $\tau_1$  donnée par  $a_1 \mapsto a_1^{-1}$  et  $a_k \mapsto a_k$  pour  $k \neq 1$ .

Noter qu'on a inversé les notations de Bridson et Vogtmann : on note  $\rho_{ij}, \lambda_{ij}$  à la place de  $\rho_{ji}, \lambda_{ji}$  pour obtenir une notation cohérente avec celles de Fuchs-Rabinovich [8], que nous réutiliserons plus loin.

Il s'agit de se donner pour chaque générateur  $s$  de  $\text{HE}(X)$  un relevé  $\hat{s} \in \text{FHE}(p)$  de sorte que les relevés satisfassent les relations de  $\text{HE}(X)$ . On voudrait *a priori* prendre pour chaque générateur un relevé dit standard, qu'on notera  $s_0$ , fixant par exemple le point  $0 \in \mathbb{Z}^n = \hat{X}$ . Toutefois, cela ne peut pas fonctionner, car cela reviendrait à considérer le morphisme de restriction  $\text{Aut}(F_n) \rightarrow \text{Aut}(N_r)$  et à espérer qu'il induise un morphisme  $\text{Out}(F_n) \rightarrow \text{Out}(N_r)$ . Ce ne peut pas être le cas car un automorphisme intérieur de  $F_n$  n'induit pas toujours sur  $N_r$  un automorphisme intérieur de  $N_r$ .

Il s'agit donc de remplacer les relevés standards  $s_0$  des générateurs par des corrigés  $\hat{s}$  satisfaisant les relations de  $\text{HE}(X)$  (et tels que  $\hat{s}$  se projette sur  $s$  dans  $X$ ). Si l'entier  $r$  est choisi premier avec  $n-1$  (avec  $N_r = F_n' F_n^r$ ), on peut se donner des entiers  $u, t \in \mathbb{Z}$  tels que  $u(n-1) + tr = 1$  (notons que, si  $n = 2$ , on peut prendre  $r = t = 0$  et  $u = 1$ ). En voyant les relevés comme des équivalences d'homotopie (préservant les fibres) de  $\hat{X}$ , lui-même identifié à  $\mathbb{Z}^n$ , les corrections effectuées par Bridson et Vogtmann s'écrivent comme suit :

- Les transvections à droite ne sont pas corrigées :  $\hat{\rho}_{ij} = (\rho_{ij})_0$ ,
- Les transvections à gauche sont corrigées par une translation :  $\hat{\lambda}_{ij} = (\lambda_{ij})_0 - ue_i$ ,
- La réflexion est corrigée par une translation :  $\hat{\tau}_1 = (\tau_1)_0 + ue_1$ .

La construction ne fonctionnera pas tout à fait dans ce cadre (c'est-à-dire que, sauf lorsque  $n = 2$ , on n'obtiendra pas un scindement  $\text{HE}(X) \hookrightarrow \text{FHE}(p)$ ), mais elle fonctionnera modulo  $r$ , ce qui donnera un scindement  $\text{HE}(X) \hookrightarrow \text{FHE}(p_r)$ .

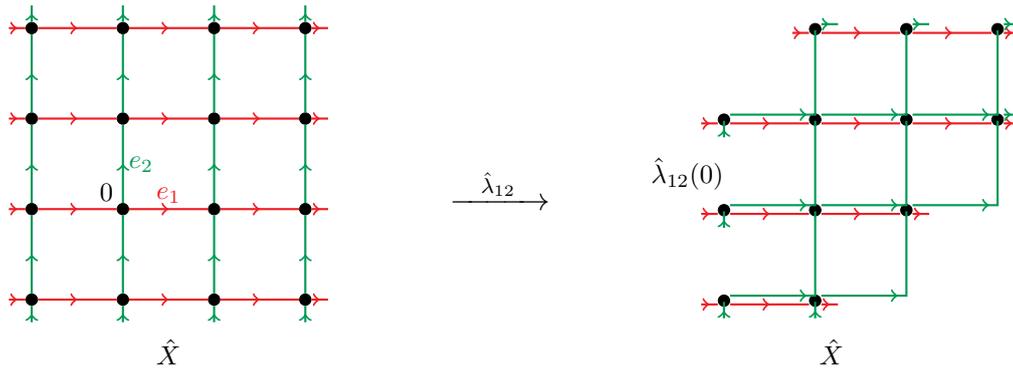


FIGURE 1 – Illustration du relevé  $\hat{\lambda}_{12} : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$  avec  $n = 2$  et  $u = 1$

On illustre par exemple en Figure 1 l'action géométrique de  $\hat{\lambda}_{12}$  : à gauche, on a représenté une portion du graphe  $\hat{X}$ , et à droite, son image par  $\hat{\lambda}_{12}$ . Les arêtes de type  $a_2$  et de direction  $e_2$  dans  $\hat{X}$  sont envoyées sur des chemins de longueur 2, de type  $a_1 a_2$ , qui font un pas vers la droite puis un pas vers le haut.

Une fois les relevés construits, il faut vérifier qu'ils satisfont les relations de Gersten. Pour cela, on remarque que les relevés de tous les générateurs agissent par transformations affines sur les sommets de  $\hat{X}$ , vus comme points de  $\mathbb{Z}^n$ . Parmi les relations de Gersten pour  $\text{HE}(X) \cong \text{Out}(F_n)$ , un certain nombre sont en fait valables dans le groupe  $\text{HE}_\bullet(X)$  des équivalences d'homotopie de  $X$  à point base fixé (qui est isomorphe à  $\text{Aut}(F_n)$ ). Pour ces relations, il suffit de vérifier que les relevés agissent trivialement sur les sommets de  $\hat{X}$  (en effet, comme ce sont des relations de  $\text{Aut}(F_n)$ , leurs relevés agissent trivialement sur les types d'arêtes); et comme l'action sur les sommets est affine, cette vérification peut être effectuée en calculant simplement un produit matriciel.

Reste une relation spécifique au groupe  $\text{HE}(X)$  :

$$\prod_{i \geq 2} \rho_{1i} \lambda_{1i}^{-1} = 1.$$

Lorsqu'on calcule le relevé  $\hat{f} = \prod_{i \geq 2} \hat{\rho}_{1i} \hat{\lambda}_{1i}^{-1}$  de cette relation, on obtient une équivalence d'homotopie de  $\hat{X}$  qui envoie l'arête d'origine  $v$  et de type  $a_i$  sur le chemin d'origine  $v + e_1 - tre_1$  et de type  $a_1^{-1} a_i a_1$ . Cette application  $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$  est donc homotope à l'élément du groupe de Galois donné par  $v \mapsto v - tre_1$ , qui est trivial dans  $\hat{X}_r$ .

Ainsi, les relevés corrigés par Bridson et Vogtmann satisfont bien les relations de Gersten, donc ils définissent un morphisme de groupes  $\text{HE}(X) \rightarrow \text{FHE}(p_r)$  qui est un scindement de  $\text{FHE}(p_r) \rightarrow \text{HE}(X)$ . D'après la Proposition 1.2, le morphisme  $\text{Aut}(F_n)/N_r \rightarrow \text{Out}(F_n)$  est donc lui aussi scindé, ce qui donne un plongement  $\text{Out}(F_n) \hookrightarrow \text{Aut}(F_n)/N_r$ .

De plus,  $N_r$  étant un sous-groupe caractéristique d'indice fini de  $F_n$ , Bridson et Vogtmann prouvent [3, Lemme 1] que le morphisme de restriction  $\text{Aut}(F_n) \rightarrow \text{Aut}(N_r)$  est injectif. Nous verrons (Lemme 3.7 de ce texte) une adaptation de leur preuve dans un cadre un peu plus général. On obtient ainsi par composition un plongement  $\text{Out}(F_n) \hookrightarrow \text{Out}(N_r)$ . Comme  $N_r$  est un sous-groupe d'indice  $r^n$  de  $F_n$ , il est libre de rang  $r^n(n-1) + 1$  (d'après le Théorème de Nielsen-Schreier), ce qui donne le Corollaire A de [3] :

**Théorème 1.3** (Bridson-Vogtmann [3]). *Soit  $n, r \geq 2$  tels que  $r$  est premier avec  $n - 1$ . Si  $m = r^n(n - 1) + 1$ , alors il existe un plongement*

$$\text{Out}(F_n) \hookrightarrow \text{Out}(F_m).$$

### 1.3 Optimalité de la construction

L'argument de Bridson et Vogtmann développé dans le paragraphe précédent montre que, si  $r$  est premier avec  $n - 1$ , alors le morphisme  $\text{Aut}(F_n)/F_n'F_n^r \rightarrow \text{Out}(F_n)$  est scindé. Lorsque  $r$  n'est pas premier avec  $n - 1$ , Bridson et Vogtmann [3] montrent en fait que ce morphisme n'est pas scindé. Pour ce faire, ils exhibent un élément d'ordre fini de  $\text{Out}(F_n)$  dont tout antécédent dans  $\text{Aut}(F_n)/F_n'F_n^r$  est d'ordre infini. D'après la Proposition 1.2, cela revient à fixer un graphe  $X$  de genre  $n$ , à noter  $p_r : \hat{X}_r \rightarrow X$  son revêtement de groupe fondamental  $F_n'F_n^r$ , et à trouver une équivalence d'homotopie de  $X$  qui est d'ordre fini (à homotopie près) et dont tout relevé à  $\hat{X}_r$  est d'ordre infini. Le graphe  $X$  choisi par

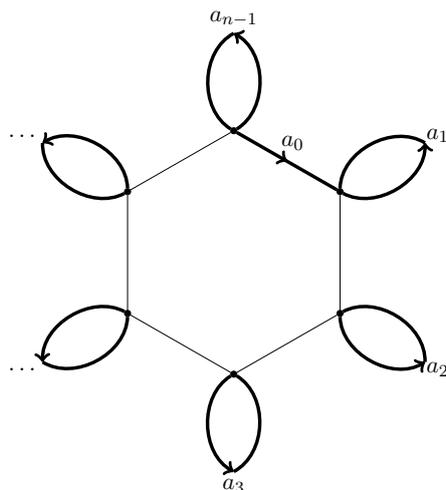


FIGURE 2 – Graphe de genre  $n$  avec une symétrie d'ordre  $n - 1$  (sur le dessin,  $n = 7$ )

Bridson et Vogtmann est un  $(n - 1)$ -cycle où on attache une boucle à chaque sommet. On en donne une représentation en Figure 2, où le graphe a été muni d'un arbre couvrant et

d'un étiquetage des cordes par une base de  $F_n$ , ce qui donne une identification de  $\pi_1 X$  avec  $F_n$ . Le graphe  $X$  a la spécificité d'avoir une symétrie d'ordre  $n-1$ , qui est la rotation envoyant la boucle étiquetée par  $a_i$  sur celle étiquetée par  $a_{i+1}$ . On notera cette rotation  $\theta$  et on la verra comme un élément du groupe  $\text{HE}(X)$  des équivalences d'homotopie de  $X$  à homotopie près.

Le revêtement abélien maximal  $\hat{X}$  de  $X$  est une grille  $\mathbb{Z}^n$ , où la direction correspondant au générateur  $a_0$  de  $\pi_1 X$  a été dilatée. Le graphe  $\hat{X}$  peut être plongé dans  $\mathbb{R}^n$ , lui-même muni d'une base  $(e_0, \dots, e_{n-1})$ , où l'action du groupe de Galois est donnée par  $a_0 \cdot v = v + (n-1)e_0$ , et  $a_i \cdot v = v + e_i$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  avec le marquage de la Figure 2.

À partir de là, on peut travailler en coordonnées, calculer explicitement les relevés de  $\theta$  dans  $\text{FHE}(p_r)$ , et vérifier qu'ils sont tous d'ordre infini lorsque  $r$  n'est pas premier avec  $n-1$ . Il s'ensuit que le morphisme  $\text{FHE}(p_r) \rightarrow \text{HE}(X)$  ne peut pas être scindé, donc  $\text{Aut}(F_n)/F'_n F_n^r \rightarrow \text{Out}(F_n)$  non plus.

Les arguments esquissés jusqu'ici montrent que  $\text{Aut}(F_n)/N \rightarrow \text{Out}(F_n)$  est scindé lorsque  $N = F'_n F_n^r$  avec  $r$  premier avec  $n-1$ , et non scindé lorsque  $N = F'_n F_n^r$  pour les autres valeurs de  $r$ . On pourrait se demander s'il existe d'autres choix de sous-groupes caractéristiques  $N$  de  $F_n$  pour lesquels le scindement est possible. En fait, le lemme qui suit implique que l'analyse ci-dessus couvre tous les sous-groupes caractéristiques  $N$  de  $F_n$  tels que le quotient  $F_n/N$  est abélien.

**Lemme 1.4.** (i) *Tout sous-groupe caractéristique  $N$  de  $\mathbb{Z}^n$  est de la forme  $N = r\mathbb{Z}^n$  pour un entier  $r \geq 0$ .*

(ii) *Tout sous-groupe caractéristique  $N$  de  $F_n$  tel que  $F_n/N$  est abélien est de la forme  $N = F'_n F_n^r$  pour un entier  $r \geq 0$ .*

*Démonstration.* (i) Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbb{Z}^n$ . On peut supposer que  $N \neq 0$ , de sorte qu'il existe  $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in N \setminus 0$ . Sans perte de généralité,  $\lambda_1 \neq 0$ ; en considérant l'automorphisme  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$  donné par  $e_1 \mapsto -e_1$  et  $e_i \mapsto e_i$  pour  $i \neq 1$ , on voit que  $2\lambda_1 e_1 = x - \varphi(x) \in N$ . Ainsi, l'entier

$$r = \min \{ \lambda \geq 1, \lambda e_1 \in N \}$$

est bien défini. On a alors  $re_1 \in N$ , et en considérant un automorphisme envoyant  $e_1$  sur  $e_i$ , on voit que  $re_i \in N$  pour tout  $i$ , d'où  $r\mathbb{Z}^n \subseteq N$ . Si cette inclusion n'est pas une égalité, alors on peut trouver  $y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n \in N \setminus r\mathbb{Z}^n$ . Quitte à soustraire un élément de  $r\mathbb{Z}^n$ , on peut supposer que  $|\mu_i| \leq r/2$  pour tout  $i$ . Comme précédemment, on voit que  $2|\mu_i|e_i \in N$ , donc  $2|\mu_i|e_1 \in N$  pour tout  $i$ . Par choix de  $r$ , on doit avoir  $\mu_i = 0$  ou  $|\mu_i| = r/2$  (et dans ce cas, on peut supposer  $\mu_i = r/2$  quitte à appliquer un automorphisme envoyant  $e_i$  sur  $-e_i$ ). Ainsi,  $y = r/2(\eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n)$ , avec  $\eta_i \in \{0, 1\}$ . Comme  $y \notin N$ , il existe  $i$  tel que  $\eta_i \neq 0$ , donc il existe un automorphisme de  $\mathbb{Z}^n$  envoyant  $\eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n$  sur  $e_1$ . On a ainsi  $(r/2)e_1 \in N$ , ce qui contredit le choix de  $r$ . Donc  $N = r\mathbb{Z}^n$ .

(ii) Comme  $F_n/N$  est abélien, on a  $F'_n \subseteq N$ , et l'application quotient  $F_n \rightarrow F_n/N$  se factorise par  $F_n/F'_n = \mathbb{Z}^n$ . Donc  $F_n/N$  est un quotient de  $\mathbb{Z}^n$ ; on note  $N_0 = \text{Ker}(\mathbb{Z}^n \rightarrow F_n/N)$ . Comme le morphisme naturel  $\text{Aut}(F_n) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$  est surjectif (on peut le voir en remarquant que  $\text{Aut}(\mathbb{Z}^n) = \text{GL}_n(\mathbb{Z})$  est engendré par des matrices de transvection et de réflexion), et que  $N$  est un sous-groupe caractéristique de  $F_n$ , il s'ensuit que  $N_0$  est aussi un sous-groupe caractéristique de  $\mathbb{Z}^n$ . D'après (i), on peut écrire  $N_0 = r\mathbb{Z}^n$  (avec  $r \geq 0$ ), d'où  $N = F'_n F_n^r$ .  $\square$

En rassemblant ce qui précède, on a caractérisé les revêtements abéliens caractéristiques  $p$  d'un graphe  $X$  pour lesquels le morphisme  $\text{FHE}(p) \rightarrow \text{HE}(X)$  est scindé. En termes plus algébriques, cela donne le Théorème 1 de [3] :

**Théorème 1.5** (Bridson-Vogtmann [3]). *Soit  $N$  un sous-groupe caractéristique du groupe libre  $F_n$  de rang  $n \geq 2$  tel que  $F_n/N$  est abélien. Alors la suite exacte*

$$1 \rightarrow F_n/N \rightarrow \text{Aut}(F_n)/N \rightarrow \text{Out}(F_n) \rightarrow 1$$

*est scindée si et seulement si  $N = F_n' F_n^r$  avec  $r$  premier avec  $n - 1$ .*

Si on n'impose plus à  $F_n/N$  d'être abélien, la géométrie du revêtement  $\hat{X}$  devient immédiatement plus subtile. Par exemple, si  $N = [F_n, F_n']$ , alors  $F_n/N$  est le groupe 2-nilpotent libre de rang  $n$  (c'est le groupe de Heisenberg lorsque  $n = 2$ ). Si  $X$  est la rose à  $n$  pétales, alors  $\hat{X}$  se plonge dans  $\mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$ , et on peut encore travailler en coordonnées, mais les calculs se complexifient et il n'est pas clair qu'on puisse construire un scindement de  $\text{FHE}(p) \rightarrow \text{HE}(X)$  (modulo  $r$ ) ni en prouver l'impossibilité.

## Chapitre 2

# Représentations arboréales, équivalences d'homotopie et revêtements

### 2.1 Notion de représentation arboréale

Étant donné un graphe  $X$  muni d'un point base  $x_0$ , on a une action libre du groupe fondamental  $\pi_1(X, x_0)$  sur le revêtement universel  $\tilde{X}$ , qui est un arbre. De plus, tout morphisme de graphes  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  induit un morphisme de groupes  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  ainsi qu'un morphisme d'arbres  $\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ , qui est défini de manière unique après avoir choisi des relevés  $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0$  de  $x_0, y_0$ . Enfin,  $\tilde{f}$  est  $\pi_1$ -équivariant au sens où

$$\tilde{f}(\gamma \cdot \tilde{x}) = (f_*\gamma) \cdot \tilde{f}(\tilde{x})$$

pour tous  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  et  $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ . Réciproquement, étant donné deux arbres munis d'actions libres de groupes, tout morphisme équivariant induit un morphisme entre les graphes quotients.

Généraliser les notions de morphismes et revêtements aux graphes de groupes revient à enlever l'hypothèse de liberté dans l'action du groupe fondamental sur le revêtement universel. C'est ce qui motive la définition suivante.

**Définition 2.1.** *Une représentation arboréale est un couple  $(A, G)$  constitué d'un arbre  $A$  et d'un groupe  $G$  agissant sur  $A$  sans inversion d'arête. Le groupe  $G$  est le groupe fondamental de la représentation arboréale et l'arbre  $A$  en est le revêtement universel. Un morphisme de représentations arboréales  $\varphi : (A, G) \rightarrow (B, H)$  est la donnée d'un morphisme de groupes  $\varphi_* : G \rightarrow H$  et d'un morphisme d'arbres  $\varphi : A \rightarrow B$  qui est équivariant, au sens où*

$$\varphi(g \cdot c) = (\varphi_*g) \cdot \varphi(c)$$

pour tout chemin  $c \in P(A)$  et tout élément  $g \in G$ .

Notons que, si  $(A, G)$  est une représentation arboréale, alors le quotient  $G \backslash A$  a naturellement une structure de graphe de groupes, en étiquetant la classe  $[v] \in V(G \backslash A)$  du sommet  $v \in V(A)$  par la classe d'isomorphisme du stabilisateur  $\text{Stab}_G(v)$  et la classe  $[e] \in \vec{E}(G \backslash A)$  par  $\text{Stab}_G(e)$ . Si l'action de  $G$  sur  $A$  est libre, alors les stabilisateurs sont triviaux et le quotient est en fait un graphe. Dans tous les cas, la théorie de Bass-Serre

explique comment reconstruire  $A$  (ainsi que  $G$  et son action) comme revêtement universel du graphe de groupes  $G \backslash A$  (voir la monographie de Serre [18]). De plus, Bass définit dans [1] une notion de morphisme de graphes de groupes ; cette notion est plus restrictive que la notre, car elle revient à considérer les morphismes équivariants d'arbres, mais en imposant aux morphismes d'envoyer toute arête sur une arête, et pas sur un chemin (voir [1, Prop. 2.4]).

Afin de définir une bonne notion d'homotopie pour les représentations arboréales, il s'agit d'abord de caractériser l'homotopie dans les graphes de manière purement combinatoire. Considérons deux morphismes de graphes  $f_0, f_1 : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ . Si  $f_0$  et  $f_1$  sont homotopes relativement à  $x_0$ , alors les morphismes induits  $f_{0*}, f_{1*} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  sont égaux. Si  $f_0$  et  $f_1$  sont librement homotopes, il existe une homotopie  $f_\bullet$  entre les deux, et si  $c$  est le lacet  $t \mapsto f_t(x_0)$  basé en  $y_0$  dans  $Y$ , alors on a  $f_{0*} = \text{ad}(c) \circ f_{1*}$  (où on rappelle que  $\text{ad}(c) : \gamma \mapsto c\gamma c^{-1}$ ). En fait, ceci caractérise l'homotopie dans les graphes, d'où la définition suivante.

**Définition 2.2.** Soit  $\varphi_0, \varphi_1 : (A, G) \rightarrow (B, H)$  deux morphismes de représentations arboréales.

- On dit que  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont homotopes, et on note  $\varphi_0 \sim \varphi_1$ , si  $\varphi_{0*} = \varphi_{1*} : G \rightarrow H$ .
- On dit que  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont librement homotopes, et on note  $\varphi_0 \overset{\text{libre}}{\sim} \varphi_1$ , s'il existe  $h \in H$  tel que  $\varphi_{0*} = \text{ad}(h) \circ \varphi_{1*}$ .

## 2.2 Équivalences d'homotopie et réduction

**Définition 2.3.** Un morphisme de représentations arboréales  $\varphi : (A, G) \rightarrow (B, H)$  est appelé équivalence d'homotopie s'il existe  $\psi : (B, H) \rightarrow (A, G)$  tel que  $\varphi\psi \sim \text{id}_{(B, H)}$  et  $\psi\varphi \sim \text{id}_{(A, G)}$ . Le morphisme  $\varphi$  est une équivalence d'homotopie libre s'il existe  $\psi$  tel que  $\varphi\psi \overset{\text{libre}}{\sim} \text{id}_{(B, H)}$  et  $\psi\varphi \overset{\text{libre}}{\sim} \text{id}_{(A, G)}$ .

On note  $\text{he}_\bullet(A, G)$  et  $\text{he}(A, G)$  les ensembles des équivalences d'homotopie et des équivalences d'homotopie libres  $(A, G) \rightarrow (A, G)$ . On considère de plus les groupes

$$\text{HE}_\bullet(A, G) = \text{he}_\bullet(A, G) / \sim \quad \text{et} \quad \text{HE}(A, G) = \text{he}(A, G) / \overset{\text{libre}}{\sim}.$$

Arrêtons-nous sur un exemple simple pour illustrer l'équivalence d'homotopie de représentations arboréales. La Figure 3 montre deux représentations arboréales de même groupe fondamental  $G = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/4$ , où on a noté  $a, b, c$  les générateurs respectifs des trois facteurs  $\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/4$ . Pour visualiser une représentation arboréale  $(A, G)$ , on dessine ici son revêtement universel  $A$ , sur lequel on indique l'action du groupe  $G$  (ou seulement de ses générateurs), et on donne le graphe de groupes quotient  $G \backslash A$ , qui synthétise la donnée de  $(A, G)$ . Les sommets à stabilisateur trivial sont indiqués en noir et les autres en blanc ; les arêtes d'une même orbite sont dessinées de la même couleur. Sur la Figure 3, on a un morphisme de la représentation arboréale de gauche vers celle de droite correspondant à la contraction de toutes les arêtes vertes (celles qui correspondent au générateur  $a$ ), avec le morphisme identité entre les groupes fondamentaux ; le morphisme induit sur les graphes de groupes consiste à contracter l'unique arête verte. En fait, ce morphisme de représentations arboréales est une équivalence d'homotopie, comme va le montrer la preuve du Lemme 2.4 qui généralise cet exemple.

Le Lemme 2.4 est un résultat de réduction des représentations arboréales : le (ii) est une reformulation du fait que, dans un graphe, on peut contracter un arbre couvrant pour

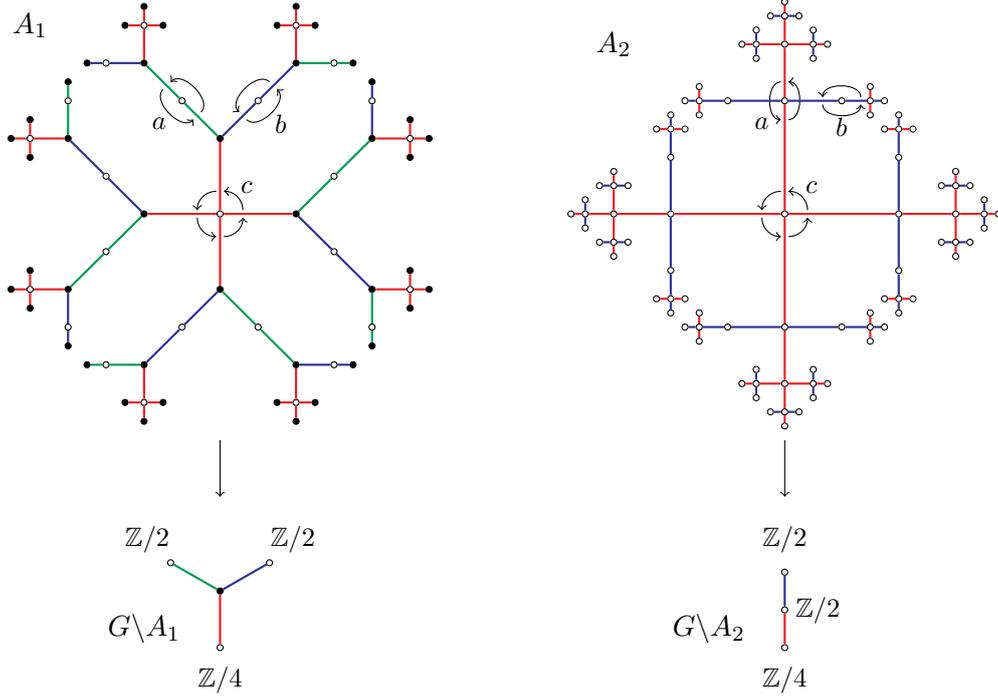


FIGURE 3 – Deux représentations arboréales homotopiquement équivalentes  $(A_1, G)$  et  $(A_2, G)$

obtenir une équivalence d'homotopie avec une rose à  $n$  pétales, et le (iii) en est un analogue pour les représentations arboréales non libres, généralisant l'exemple de la Figure 3.

**Lemme 2.4.** Soit  $(A, G)$  une représentation arboréale à stabilisateurs d'arêtes triviaux.

- (i) Si  $A_0$  est un sous-arbre de  $A$  invariant sous l'action de  $G$ , alors on a une équivalence d'homotopie  $(A, G) \sim (A_0, G)$ .
- (ii) Si l'action de  $G$  sur  $A$  est libre, alors il existe une représentation arboréale  $(B, G)$  simplement transitive sur les sommets, et qui soit homotopiquement équivalente à  $(A, G)$ .
- (iii) Si l'action de  $G$  sur  $A$  n'est pas libre, alors il existe une représentation arboréale  $(B, G)$  où tous les sommets sont à stabilisateur non trivial, et qui soit homotopiquement équivalente à  $(A, G)$ .

*Démonstration.* (i) On définit un morphisme d'arbres  $r : A \rightarrow A_0$  en posant  $r(v)$  l'unique sommet de  $A_0$  minimisant la distance à  $v \in A$ . Comme  $A_0$  est  $G$ -invariant,  $r : (A, G) \rightarrow (A_0, G)$  est un morphisme avec  $r_* = \text{id}_G$ , et l'inclusion  $(A_0, G) \rightarrow (A, G)$  est un inverse de  $r$  à homotopie près.

- (ii) Dans le cas où l'action de  $G$  sur  $A$  est libre, on a un graphe  $X = G \setminus A$  dont  $G$  est le groupe fondamental et  $A$  est le revêtement universel. On note  $n$  le genre de  $X$  et  $R$  la rose à  $n$  pétales (c'est-à-dire l'unique graphe à un sommet et  $n$  arêtes) et  $\tilde{R}$  son revêtement universel. Alors on a une équivalence d'homotopie  $X \rightarrow R$ , qui se relève en un morphisme d'arbres  $A \rightarrow \tilde{R}$ , qu'on peut voir comme une équivalence d'homotopie de représentations arboréales en notant que  $G \cong \pi_1 R$ . Ainsi,  $(A, G)$  est homotopiquement équivalente à  $(\tilde{R}, \pi_1 R)$ , qui est simplement transitive sur les sommets.

(iii) Considérons l'ensemble  $T$  des sommets de  $A$  à stabilisateur trivial. Notons que  $T$  est  $G$ -stable et posons  $\bar{T} = G \backslash T$  l'ensemble des orbites d'éléments de  $T$ . Pour  $Gv \in \bar{T}$ , on choisit une orbite  $Gp(v)$ , avec  $p(v) \in A \setminus T$  minimisant la distance à  $v$ , et on note  $c_v$  l'unique chemin de  $v$  à  $p(v)$  dans  $A$  et  $\bar{c}_{Gv}$  son orbite sous l'action de  $G$ . Nécessairement, les sommets intérieurs du chemin  $c_v$  sont tous dans  $T$ . On suppose de plus que les choix de  $p(v)$  sont faits de sorte que, si  $w \in c_v$ , alors  $p(w) = p(v)$ . Soit maintenant  $B$  l'arbre obtenu à partir de  $A$  en contractant toutes les orbites  $\bar{c}_{Gv}$ . Comme l'ensemble contracté est  $G$ -stable, on a une action induite de  $G$  sur  $B$  telle que le morphisme de contraction  $q : A \rightarrow B$  est  $G$ -équivariant, autrement dit  $q : (A, G) \rightarrow (B, G)$  est un morphisme de représentations arboréales avec  $q_* = \text{id}_G$ . On peut de plus définir un morphisme d'arbres  $j : B \rightarrow A$  par  $qj(v) = v$ , ce qui donne un morphisme de représentations arboréales  $j : (B, G) \rightarrow (A, G)$  avec  $j_* = \text{id}_G$ . Ainsi,  $q, j$  sont des équivalences d'homotopie inverses l'une de l'autre, et  $(B, G)$  n'a que des sommets à stabilisateur non trivial.  $\square$

Le résultat suivant est une manière de dire que, comme dans les graphes, une équivalence d'homotopie peut être spécifiée par son action sur le groupe fondamental.

**Définition 2.5.** Une représentation arboréale  $(A, G)$  est dite cocompacte si le graphe quotient  $G \backslash A$  est fini.

**Proposition 2.6.** Soit  $(A, G)$  une représentation arboréale cocompacte, à stabilisateurs d'arêtes triviaux et à stabilisateurs de sommets librement indécomposables non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ .

- (i) Pour tout  $\alpha \in \text{Aut}(G)$ , il existe un morphisme  $\varphi : (A, G) \rightarrow (A, G)$  tel que  $\varphi_* = \alpha$ .
- (ii) Soit  $\varphi : (A, G) \rightarrow (A, G)$ . S'équivalent :
  - (a)  $\varphi \in \text{he}_\bullet(A, G)$ .
  - (b)  $\varphi \in \text{he}(A, G)$ .
  - (c)  $\varphi_* \in \text{Aut}(G)$ .

*Démonstration.* (i) D'après le Lemme 2.4, on peut se ramener à l'un des deux cas suivants :

- L'action de  $G$  sur  $A$  est simplement transitive. On fixe dans ce cas un sommet  $v \in A$ , de sorte qu'on a une bijection entre  $G$  et les sommets de  $A$  donnée par  $g \mapsto gv$ . On définit alors  $\varphi : A \rightarrow A$  par  $\varphi(gv) = (\alpha g)v$ , ce qui donne un morphisme  $\varphi : (A, G) \rightarrow (A, G)$  avec  $\varphi_* = \alpha$ .
- Les sommets de  $A$  sont tous à stabilisateur non trivial. On considère alors le graphe de groupes  $\mathbb{X} = G \backslash A$  (qui est fini et sans stabilisateurs d'arêtes), qu'on munit d'un arbre couvrant  $T$  tel que  $A = \tilde{X}$  est le revêtement universel associé, et  $G = \pi_1(\mathbb{X}, T)$ . On peut écrire

$$G = G_1 * \cdots * G_k * F_r,$$

avec  $G_i$  librement indécomposable non isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , et choisir une section  $s : V(X) \rightarrow V(A)$  telle que, si  $v_1, \dots, v_k$  sont les sommets de  $X$ , alors

$$\text{Stab}_G(s(v_i)) = G_i \leq G.$$

Les sommets de  $A$  sont alors les orbites des  $s(v_i)$ .

D'après le Théorème de Grushko, il existe une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ , et pour tout  $i$ , un certain  $\gamma_i \in G$ , tel que  $\alpha(G_i) = \gamma_i G_{\sigma(i)} \gamma_i^{-1}$ . On définit donc  $\varphi : A \rightarrow A$  par

$$\varphi(g \cdot s(v_i)) = (\alpha g) \gamma_i \cdot s(v_{\sigma(i)}).$$

On obtient ainsi un morphisme  $\varphi : (A, G) \rightarrow (A, G)$  avec  $\varphi_* = \alpha$ .

- (ii) Il est clair que (ii)(a)  $\Rightarrow$  (ii)(b)  $\Rightarrow$  (ii)(c). Réciproquement, supposons que  $\varphi_* \in \text{Aut}(G)$ . D'après (i), il existe  $\psi : (A, G) \rightarrow (A, G)$  tel que  $\psi_* = (\varphi_*)^{-1}$ , donc  $\psi$  est un inverse de  $\varphi$  à homotopie près.  $\square$

## 2.3 Suite exacte de Birman

Soit  $(A, G)$  une représentation arboréale. Étant donnée une équivalence d'homotopie  $\varphi \in \text{he}_\bullet(A, G)$ , on a un automorphisme induit  $\varphi_*$  de  $G$ . De plus, deux équivalences d'homotopie  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont homotopes si et seulement si  $\varphi_{0*} = \varphi_{1*}$ ; ainsi, on obtient un monomorphisme  $\text{HE}_\bullet(A, G) \hookrightarrow \text{Aut}(G)$ . On a de même un monomorphisme  $\text{HE}(A, G) \hookrightarrow \text{Out}(G)$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{HE}_\bullet(A, G) & \longrightarrow & \text{HE}(A, G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Aut}(G) & \longrightarrow & \text{Out}(G) \end{array}$$

Avec les hypothèses de la Proposition 2.6, le morphisme  $\text{HE}_\bullet(A, G) \rightarrow \text{Aut}(G)$  doit être surjectif, et comme  $\text{Aut}(G) \rightarrow \text{Out}(G)$  l'est aussi,  $\text{HE}(A, G) \rightarrow \text{Out}(G)$  est aussi surjectif, donc les flèches verticales sont des isomorphismes.

Les deux flèches horizontales du diagramme ci-dessus sont des applications quotients, reste à déterminer leurs noyaux. Supposons pour cela que le centre  $Z(G)$  est trivial (c'est le cas par exemple si  $G$  est un produit libre d'au moins deux facteurs). Dans ce cas, l'action de  $G$  sur lui-même par conjugaison induit un plongement  $G \hookrightarrow \text{Aut}(G)$  qui est le noyau de  $\text{Aut}(G) \twoheadrightarrow \text{Out}(G)$ .

En fait, on a le résultat suivant.

**Proposition 2.7** (Suite exacte de Birman). *Soit  $(A, G)$  une représentation arboréale cocompacte, à stabilisateurs d'arêtes triviaux et à stabilisateurs de sommets librement indécomposables non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ , avec  $Z(G) = 1$ . Alors il existe un morphisme  $\delta : G \rightarrow \text{HE}_\bullet(A, G)$  tel que le diagramme suivant soit commutatif avec des lignes exactes :*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\delta} & \text{HE}_\bullet(A, G) & \twoheadrightarrow & \text{HE}(A, G) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \text{Aut}(G) & \longrightarrow & \text{Out}(G) \longrightarrow 1 \end{array}$$

Toutes les flèches sauf  $\delta$  sont les morphismes naturels entre les objets concernés.

*Démonstration.* Vu la discussion ci-dessus, il reste seulement à construire  $\delta$ .

Pour  $g \in G$ , on définit une équivalence d'homotopie  $\varphi_g \in \text{he}_\bullet(A, G)$  par

$$\begin{aligned} \varphi_g : v \in A &\longmapsto g \cdot v \in A, \\ \varphi_{g*} : h \in G &\longmapsto ghg^{-1} \in G, \end{aligned}$$

et on note  $\delta(g) \in \text{HE}_\bullet(A, G)$  la classe d'homotopie de  $\varphi_g$ . Comme  $\varphi_{g*}$  agit sur  $G$  par conjugaison, cette application  $\delta$  fait commuter le diagramme ci-dessus. Et on sait que la seconde ligne est exacte, donc la première aussi.  $\square$

En voyant  $\text{HE}(A, G)$  comme la *mapping class group* de  $(A, G)$ , la ligne supérieure est l'analogie de la suite exacte de Birman, et le morphisme  $\delta$  correspond à ce que certains auteurs appellent la *point-pushing map* (voir par exemple [6, § 4.2]).

## 2.4 Revêtements normaux et groupe de Galois

On introduit maintenant la notion de revêtement pour les représentations arboréales. Dans le cas des graphes, si  $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  est un revêtement (pointé), alors  $Y$  et  $X$  ont le même revêtement universel  $\tilde{X}$ , et le morphisme induit  $p_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  est injectif. Réciproquement, tout sous-groupe  $N \leq \pi_1(X, x_0)$  induit un revêtement  $N \backslash \tilde{X} \rightarrow X$ .

**Définition 2.8.** *Un morphisme de représentations arboréales  $p : (A', N) \rightarrow (A, G)$  est un revêtement si  $p : A' \rightarrow A$  est un isomorphisme d'arbres et  $p_* : N \rightarrow G$  est un monomorphisme de groupes. Ce revêtement est dit normal (respectivement caractéristique) lorsque  $p_*N$  est un sous-groupe normal (respectivement caractéristique) de  $G$ .*

Considérons un revêtement normal  $p : (A', N) \rightarrow (A, G)$ . En premier lieu, nous nous attachons à comprendre l'analogie du groupe de Galois pour les représentations arboréales. Étant donné  $g \in G$ , on définit

$$\theta(g) : v \in A' \mapsto p^{-1}(g \cdot p(v)) \in A'.$$

Comme  $p_*N$  est normal dans  $G$ , on peut de plus définir un morphisme  $\theta(g)_* : N \rightarrow N$  en faisant agir  $g$  par conjugaison sur  $p_*N$  :

$$p_*\theta(g)_*n = g(p_*n)g^{-1}.$$

On obtient un morphisme de représentations arboréales  $\theta(g) : (A', N) \rightarrow (A', N)$ .

L'application  $\theta$  donne maintenant un morphisme de groupes  $G \rightarrow \text{Aut}(A', N)$ . Ceci correspond, dans le cas des graphes, à l'action du groupe fondamental de la base sur le revêtement. Le *groupe de Galois* (ou *groupe des transformations du deck*) de  $p$  est défini par

$$\text{Deck}(p) = \theta(G)/\theta(p_*N).$$

Si on note  $\bar{\theta}$  la composition  $G \xrightarrow{\theta} \theta(G) \rightarrow \text{Deck}(p)$ , on a donc une suite exacte

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{p_*} G \xrightarrow{\bar{\theta}} \text{Deck}(p) \rightarrow 1.$$

Prenons par exemple  $G = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$  le groupe diédral infini (dont on note les générateurs  $a, b$ ), et soit  $N = \langle (ab)^k \rangle \trianglelefteq G$ . Soit  $A$  un arbre de Serre associé à  $G$ . On illustre en Figure 4 (lorsque  $k = 4$ ) le revêtement  $p : (A, N) \rightarrow (A, G)$ , où  $p = \text{id}_A$ , et  $p_* : N \rightarrow G$  est l'inclusion. En haut, on a représenté l'arbre  $A$  avec l'action des générateurs, en bas à droite, le graphe de groupes quotient  $G \backslash A$ , et en bas à gauche, le graphe de groupes  $N \backslash A$ . Notons que dans le cas présent,  $N$  est un groupe cyclique infini agissant par translation de longueur  $2k$  sur  $A$ ; en particulier, l'action de  $N$  sur  $A$  est libre, donc le graphe de groupes  $N \backslash A$  est à stabilisateurs de sommets triviaux : c'est un graphe au sens usuel.

Le groupe de Galois est donné par  $\text{Deck}(p) \cong G/N$ ; ici, c'est le groupe diédral  $D_{2k}$ . Son action sur la représentation arboréale  $(A, N)$  peut être interprétée comme une action sur le graphe quotient  $N \backslash A$  : les générateurs  $a$  et  $b$  agissent par réflexion selon deux des diagonales, comme indiqué sur le dessin.

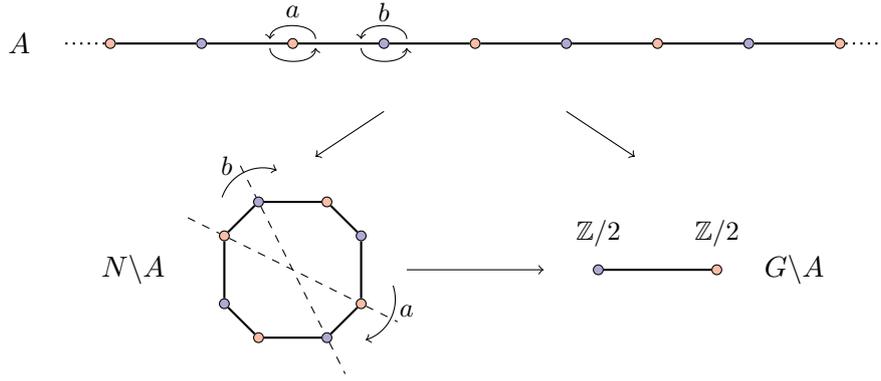


FIGURE 4 – Un revêtement de représentations arboréales  $(A, N) \rightarrow (A, G)$

Nous prendrons désormais l'habitude d'illustrer une représentation arboréale en dessinant seulement le graphe de groupes quotient. Selon cette convention, le diagramme de la Figure 4 peut être interprété comme représentant une tour de revêtements  $(A, 1) \rightarrow (A, N) \rightarrow (A, G)$  formant un diagramme commutatif.

## 2.5 Équivalences d'homotopie préservant les fibres

On s'intéresse maintenant au groupe  $\text{FHE}(p)$  des équivalences d'homotopie préservant les fibres et à ses liens avec les autres groupes étudiés. Pour un revêtement de graphes  $p : Y \rightarrow X$ , un morphisme  $h : Y \rightarrow Y$  préserve les fibres si pour tous  $y_1, y_2 \in Y$  tels que  $p(y_1) = p(y_2)$ , on a  $ph(y_1) = ph(y_2)$ . Remarquons maintenant que, pour un revêtement normal,  $p(y_1) = p(y_2)$  si et seulement si  $y_1$  et  $y_2$  sont dans la même orbite sous l'action de  $\pi_1 X$ .

**Définition 2.9.** Soit  $p : (A', N) \rightarrow (A, G)$  un revêtement normal de représentations arboréales. Un morphisme  $\psi : (A', N) \rightarrow (A', N)$  préserve les fibres de  $p$  si pour tout chemin  $c \in P(A)$  et tout élément  $g \in G$ , il existe  $g' \in G$  tel que

$$p\psi p^{-1}(g \cdot c) = g' \cdot p\psi p^{-1}(c).$$

On note  $\text{fhe}(p)$  l'ensemble des équivalences d'homotopie  $\psi \in \text{he}(A', N)$  préservant les fibres de  $p$ .

Soit  $\psi \in \text{fhe}(p)$ . On cherche à projeter  $\psi$  en un morphisme  $\varphi : (A, G) \rightarrow (A, G)$  faisant commuter le carré ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} (A', N) & \xrightarrow{\psi} & (A', N) \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ (A, G) & \xrightarrow{\varphi} & (A, G) \end{array}$$

Le lemme suivant va nous permettre de construire  $\varphi$ .

**Définition 2.10.** Une représentation arboréale  $(A, G)$  est dite contractile si elle est homotopiquement équivalente à un point muni d'une action triviale de groupe.

**Lemme 2.11.** Soit  $p : (A', N) \rightarrow (A, G)$  un revêtement normal de représentations arboréales, avec  $(A', N)$  non contractile et  $(A, G)$  à stabilisateurs d'arêtes triviaux. Si  $\psi \in \text{fhe}(p)$ , alors pour tout  $g \in G$ , il existe un unique  $\hat{g} \in G$  tel que

$$p\psi p^{-1}(g \cdot c) = \hat{g} \cdot p\psi p^{-1}(c)$$

pour tout chemin  $c \in P(A)$ .

*Démonstration.* Comme  $(A', N)$  est non contractile et  $\psi$  est une équivalence d'homotopie, son image n'est pas réduite à un point. En particulier, il existe un arc  $e \in \vec{E}(A')$  tel que  $\psi(e)$  est un chemin non trivial. Mais  $(A, G)$  est à stabilisateurs d'arêtes triviaux, donc  $\text{Stab}_G(p\psi(e)) = 1$ .

On se donne maintenant  $g \in G$ . Comme  $\psi$  préserve les fibres, il existe un  $\hat{g} \in G$  tel que

$$p\psi p^{-1}(g \cdot p(e)) = \hat{g} \cdot p\psi(e).$$

Soit  $v \in A'$ . Il existe un unique chemin  $c$  dans  $A'$  d'origine  $v$  et contenant  $e$  ou  $\bar{e}$ . Comme  $\psi$  préserve les fibres, il existe un  $\hat{g}_0 \in G$  tel que

$$p\psi p^{-1}(g \cdot p(c)) = \hat{g}_0 \cdot p\psi(c). \quad (*)$$

Cela implique en particulier que

$$\hat{g}_0 \cdot p\psi(e) = p\psi p^{-1}(g \cdot p(e)) = \hat{g} \cdot p\psi(e),$$

d'où  $\hat{g}^{-1}\hat{g}_0 \in \text{Stab}_G(p\psi(e)) = 1$ , c'est-à-dire  $\hat{g}_0 = \hat{g}$ . Et (\*) implique de plus que

$$p\psi p^{-1}(g \cdot p(v)) = \hat{g}_0 \cdot p\psi(v) = \hat{g} \cdot p\psi(v).$$

Comme cette identité est vraie pour tout sommet, elle l'est aussi pour tout chemin, et l'isomorphisme  $p : A' \rightarrow A$  permet de la transférer dans  $A$ .  $\square$

**Définition 2.12.** Soit  $p : (A', N) \rightarrow (A, G)$  un revêtement normal de représentations arboréales, avec  $(A', N)$  non contractile et  $(A, G)$  à stabilisateurs d'arêtes triviaux. Soit  $\psi \in \text{fhe}(p)$ . Avec les notations du Lemme 2.11, le projeté de  $\psi$  selon  $p$  est le morphisme  $\varphi : (A, G) \rightarrow (A, G)$  donné par

$$\begin{aligned} \varphi : v \in A &\longmapsto p\psi p^{-1}(v) \in A, \\ \varphi_* : g \in G &\longmapsto \hat{g} \in G. \end{aligned}$$

Dans l'exemple de revêtement de la Figure 4, considérons le morphisme  $\psi : (A, N) \rightarrow (A, N)$  correspondant à la rotation du graphe quotient  $N \setminus A$  qui envoie un sommet sur son voisin dans le sens horaire. Formellement,  $\psi : A \rightarrow A$  est une translation de longueur 1 et  $\psi_* = \text{id}_N$ . Alors  $\psi$  est un élément de  $\text{fhe}(p)$  et son projeté  $\varphi$  selon le revêtement  $p$  est donné par  $\varphi_* : a \mapsto b$  et  $b \mapsto bab$ ; il peut être compris comme le morphisme du graphe de groupes  $G \setminus A$  qui permute les deux sommets.

Afin de définir une bonne notion d'homotopie dans  $\text{fhe}(p)$ , revenons à nouveau aux graphes. Si on se donne un revêtement de graphes  $p : Y \rightarrow X$  et deux équivalences d'homotopie préservant les fibres  $h_0, h_1 \in \text{fhe}(p)$ , une homotopie suivant les fibres entre  $h_0$  et  $h_1$  est une homotopie libre  $h_\bullet$  telle que  $h_t$  préserve les fibres pour tout  $t \in [0, 1]$ . Or une application préservant les fibres peut être vue comme une application admettant un projeté sur  $X$ ; ainsi une homotopie suivant les fibres est une homotopie qui peut être projetée sur  $X$ , d'où la définition suivante.

**Définition 2.13.** Soit  $p : (A', N) \rightarrow (A, G)$  un revêtement normal de représentations arboréales, avec  $(A', N)$  non contractile et  $(A, G)$  à stabilisateurs d'arêtes triviaux. Deux équivalences d'homotopie préservant les fibres  $\psi_0, \psi_1 \in \text{fhe}(p)$  sont homotopes suivant les fibres, ce qu'on note  $\psi_0 \overset{\text{fibres}}{\sim} \psi_1$ , s'il existe  $n \in N$  tel que les projetés respectifs  $\varphi_0, \varphi_1$  de  $\psi_0, \psi_1$  vérifient  $(\varphi_0)_* = \text{ad}(p_*n) \circ (\varphi_1)_*$ . On considère le groupe

$$\text{FHE}(p) = \text{fhe}(p) / \overset{\text{fibres}}{\sim},$$

et on note  $\mu : \text{FHE}(p) \rightarrow \text{HE}(A, G)$  le morphisme induit par  $\psi \in \text{fhe}(p) \mapsto \varphi \in \text{he}(A, G)$ , où  $\varphi$  est le projeté de  $\psi$ .

## 2.6 Contractibilité des représentations arboréales

Pour pouvoir définir le groupe  $\text{FHE}(p)$  des équivalences d'homotopie préservant les fibres d'un revêtement normal  $p : (A', N) \rightarrow (A, G)$ , nous avons eu besoin de la non-contractibilité de  $(A', N)$ . Avant d'aller plus loin, intéressons-nous à cette condition et voyons comme elle peut être reformulée.

**Lemme 2.14.** Soit  $(A, G)$  une représentation arboréale. S'équivalent :

- (i)  $(A, G)$  est contractile.
- (ii) Il existe un sommet  $v \in A$  tel que  $\text{Stab}_G(v) = G$ .

*Démonstration.* L'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i) est une conséquence du Lemme 2.4.(i). Réciproquement, supposons qu'il existe une équivalence d'homotopie  $\varphi : (\bullet, H) \rightarrow (A, G)$ . Si  $v = \varphi(\bullet) \in A$ , alors

$$g \cdot v = (\varphi_* \varphi_*^{-1} g) \cdot \varphi(\bullet) = \varphi\left(\left(\varphi_*^{-1} g\right) \cdot \bullet\right) = \varphi(\bullet) = v$$

pour tout  $g \in G$ , donc  $\text{Stab}_G(v) = G$ .  $\square$

**Corollaire 2.15.** Si  $p : (A', N) \rightarrow (A, G)$  est un revêtement de représentations arboréales, alors  $(A', N)$  est contractile si et seulement s'il existe  $v \in A$  tel que  $p_*N \leq \text{Stab}_G(v)$ .  $\square$

## 2.7 Revêtements caractéristiques

Pour un revêtement caractéristique, on a les résultats suivants explicitant les interactions entre les différents protagonistes introduits ci-dessus, généralisant le cas des graphes.

**Proposition 2.16.** Soit  $p : (A', N) \rightarrow (A, G)$  un revêtement caractéristique de représentations arboréales. Si  $(A, G)$  est cocompacte, à stabilisateurs d'arêtes triviaux, à stabilisateurs de sommets librement indécomposables non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ , le centralisateur  $Z_G(p_*N)$  est trivial, et  $(A', N)$  est non contractile, alors on a un diagramme commutatif avec des lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & N & = & N & & \\ & & p_* \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\delta} & \text{HE}_\bullet(A, G) & \triangleright & \text{HE}(A, G) \rightarrow 1 \\ & & \bar{\theta} \downarrow & & \lambda \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & \text{Deck}(p) & \xrightarrow{\eta} & \text{FHE}(p) & \xrightarrow{\mu} & \text{HE}(A, G) \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

*Démonstration.* On a déjà la première colonne (par construction du groupe de Galois) et la première ligne (c'est la suite exacte de Birman, voir Proposition 2.7).

*Construction de  $\lambda$ .* Soit  $\varphi \in \text{he}_\bullet(A, G)$ . On pose

$$\psi : v \in A' \longmapsto p^{-1}\varphi p(v) \in A'.$$

Comme  $p_*N$  est caractéristique dans  $G$ , on peut de plus définir  $\psi_* : N \rightarrow N$  en faisant agir  $\varphi_*$  par restriction sur  $p_*N$ , autrement dit  $p_*\psi_* = \varphi_*p_*$ . On vérifie que  $\psi \in \text{fhe}(p)$ , puis que la classe d'homotopie suivant les fibres de  $\psi$  ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\varphi$ . Ainsi,  $\varphi \mapsto \psi$  définit un morphisme de groupe  $\lambda : \text{HE}_\bullet(A, G) \rightarrow \text{FHE}(p)$ . De plus,  $\varphi$  est le projeté de  $\psi$ , donc le carré de droite commute.

*Construction de  $\eta$ .* Le morphisme  $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(A', N)$  utilisé pour construire le groupe de Galois (voir 2.4) a image comprise dans  $\text{fhe}(p)$  donc on peut considérer le morphisme d'inclusion  $\eta_0 : \theta(G) \rightarrow \text{FHE}(p)$ . Comme  $\theta(p_*N) \subseteq \text{Ker } \eta_0$ , on a un morphisme induit  $\eta : \text{Deck}(p) \rightarrow \text{FHE}(p)$  tel que  $\eta\bar{\theta} = \eta_0\theta$ . De plus, le carré de gauche commute car  $\eta\bar{\theta}(g)_* = \eta_0\theta(g)_* = \lambda\delta(g)_*$ .

*Exactitude de la seconde ligne.* Le morphisme  $\mu$  est surjectif car  $\text{HE}_\bullet(A, G) \rightarrow \text{HE}(A, G)$  est surjectif. Le morphisme  $\eta$  est injectif : si  $\theta(g) \stackrel{\text{fibres}}{\sim} \text{id}_{(A', N)}$ , alors il existe  $\nu \in N$  tel que  $\theta(g)_* = \text{ad}(\nu)$ . Ceci implique que  $\text{ad}(g)|_{p_*N} = \text{ad}(p_*\nu)|_{p_*N}$ , donc  $g^{-1}(p_*\nu) \in Z_G(p_*N) = 1$ , d'où  $g \in p_*N$  et  $\bar{\theta}(g) = 1$ . De plus,  $\mu\eta\bar{\theta} = 1$ , et  $\bar{\theta}$  est un épimorphisme, donc  $\mu\eta = 1$ , autrement dit  $\text{Im } \eta \subseteq \text{Ker } \mu$ . Réciproquement, si  $\psi \in \text{Ker } \mu$ , alors le projeté  $\varphi$  de  $\psi$  est librement homotope à  $\text{id}_{(A, G)}$ , donc il existe  $g \in G$  tel que  $\varphi_* = \text{ad}(g)$ , ce qui implique que  $\psi \stackrel{\text{fibres}}{\sim} \theta(g)$ , donc  $\psi \in \text{Im } \eta$ .

On obtient finalement l'exactitude de la seconde colonne en chassant le diagramme.  $\square$

**Théorème 2.17.** *Soit  $p : (A', N) \rightarrow (A, G)$  un revêtement caractéristique de représentations arboréales. Si  $(A, G)$  est cocompacte, à stabilisateurs d'arêtes triviaux, à stabilisateurs de sommets librement indécomposables non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ ,  $Z_G(p_*N) = 1$ , et  $(A', N)$  est non contractile, alors on a une équivalence de suites exactes :*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & G/N & \longrightarrow & \text{Aut}(G)/N & \longrightarrow & \text{Out}(G) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & \text{Deck}(p) & \longrightarrow & \text{FHE}(p) & \longrightarrow & \text{HE}(A, G) \longrightarrow 1 \end{array}$$

*Démonstration.* On obtient le résultat en combinant la Proposition 2.16 à la suite exacte de Birman (Proposition 2.7).  $\square$

**Remarques.** (i) *Si on se restreint aux représentations arboréales libres, alors la théorie développée ci-dessus est celle de l'homotopie et des revêtements de graphes. Ainsi, la Proposition 1.2 est un cas particulier du Théorème 2.17 (d'après le Corollaire 2.15, l'hypothèse de non-contractibilité est impliquée par les hypothèses de la Proposition 1.2).*

(ii) *Une autre définition possible de l'homotopie suivant les fibres aurait été la suivante :  $\psi_0, \psi_1 \in \text{fhe}(p)$  sont homotopes suivant les fibres s'ils sont librement homotopes (dans  $(A', N)$ ) et que leurs projetés respectifs  $\varphi_0, \varphi_1$  sont librement homotopes (dans  $(A, G)$ ). En général, cette définition est moins restrictive que celle donnée plus haut : dans l'exemple de la Figure 4 (qui ne satisfait pas l'hypothèse  $Z_G(p_*N) = 1$ ), si*

$\psi \in \text{fhe}(p)$  est la rotation d'angle  $\pi/k$  du graphe  $N \setminus A$ , alors on peut vérifier que  $\psi$  est homotope suivant les fibres à  $\psi^3$  pour la seconde définition mais pas pour la première. Toutefois, les preuves de la Proposition 2.16 et du Théorème 2.17 restent valables quelle que soit la définition choisie pour l'homotopie suivant les fibres. En particulier, la seconde définition donne le même groupe  $\text{FHE}(p)$  sous les hypothèses du Théorème 2.17.

## Chapitre 3

# Représentations libres du groupe d'automorphismes extérieurs

### 3.1 Revêtements abéliens associés à un produit libre

Notre but est maintenant d'appliquer la méthode de Bridson et Vogtmann, en s'appuyant sur l'intuition géométrique fournie par le langage des représentations arboréales, pour construire des plongements de  $\text{Out}(G)$ , où  $G$  est un produit libre. On se limite dans un premier temps au cas où  $G$  est un produit libre de groupes librement indécomposables non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ . De plus, on aura besoin par la suite de supposer les facteurs abéliens. On verra en 3.5 et 3.6 comment traiter le cas où certains facteurs sont isomorphes à  $\mathbb{Z}$  (autrement dit, où  $G$  a un facteur libre).

Le revêtement caractéristique  $\hat{X}$  du graphe  $X$  choisi par Bridson et Vogtmann dans [3] pour construire des plongements de  $\text{Out}(F_n)$  est un revêtement abélien, c'est-à-dire un revêtement normal dont le groupe de Galois est abélien. Une bonne raison pour faire ce choix est la simplicité de la géométrie de  $\hat{X}$  : c'est une grille torique. Si on remplace le graphe  $X$  par une représentation arboréale  $(A, G)$  du produit libre  $G$ , nous allons voir que les revêtements abéliens de  $(A, G)$  ont une géométrie qui est proche de celle d'un tore, et cette analogie nous guidera dans la construction de plongements de  $\text{Out}(G)$ .

La première étape est de choisir un revêtement abélien de  $(A, G)$  qui est bien caractéristique.

**Lemme 3.1.** *Soit  $G = G_1 * \dots * G_n$  un produit libre de groupes librement indécomposables non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ . On se donne des entiers  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$  tels que  $r_i = r_j$  dès que  $G_i \cong G_j$ . Alors le sous-groupe  $N = G'^{r_1} \dots G'^{r_n}$  est caractéristique dans  $G$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in \text{Aut}(G)$ . D'après le Théorème de Grushko, il existe une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et des éléments  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in G$  tels que

$$\varphi(G_i) = \gamma_i G_{\sigma(i)} \gamma_i^{-1}.$$

Notons que  $r_i = r_{\sigma(i)}$  pour tout  $i$  car  $G_i \cong G_{\sigma(i)}$ . On a alors

$$\varphi(G') \subseteq G' \subseteq N$$

car  $G'$  est caractéristique dans  $G$ . De plus

$$\varphi(G_i^{r_i}) = \gamma_i G_{\sigma(i)}^{r_i} \gamma_i^{-1} \subseteq [\gamma_i, G_{\sigma(i)}^{r_i}] G_{\sigma(i)}^{r_i} \subseteq G' G_{\sigma(i)}^{r_{\sigma(i)}} \subseteq N.$$

Ainsi,  $\varphi(N) \subseteq \varphi(G') \varphi(G_1^{r_1}) \dots \varphi(G_n^{r_n}) \subseteq N$ . □

Soit  $G = G_1 * \cdots * G_n$  un produit libre et  $N = G'G_1^{r_1} \cdots G_n^{r_n}$  comme dans le Lemme 3.1. On dispose alors d'une action de  $G$  sur un arbre de Serre  $A$ , et d'un revêtement caractéristique de représentations arboréales

$$p : (A, N) \rightarrow (A, G),$$

où  $p : A \rightarrow A$  est l'identité et  $p_* : N \rightarrow G$  est l'inclusion. Nous cherchons à comprendre la géométrie de  $(A, N)$ .

Le cas où les facteurs  $G_i$  sont abéliens est particulièrement intéressant à cause du lemme suivant.

**Lemme 3.2.** *Soit  $G = G_1 * \cdots * G_n$  un produit libre de groupes abéliens. Si  $A$  est un arbre de Serre du produit libre, alors le sous-groupe dérivé  $G'$  agit librement sur  $A$ . En particulier,  $G'$  est libre.*

*Démonstration.* Si  $v$  est un sommet de  $A$ , alors son stabilisateur sous l'action de  $G$  est donné par

$$\text{Stab}_G(v) = \gamma G_i \gamma^{-1},$$

avec  $\gamma \in G$  et  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Comme l'abélianisé de  $G$  est le produit direct  $G_1 \times \cdots \times G_n$ , le stabilisateur de  $v$  sous l'action de  $G'$  est donné par

$$\text{Stab}_{G'}(v) = \text{Stab}_G(v) \cap G' = \gamma G_i \gamma^{-1} \cap \text{Ker}(G \rightarrow G_1 \times \cdots \times G_n) = 1.$$

Il s'ensuit que  $G'$  agit librement sur l'arbre  $A$ , donc  $G'$  est libre. □

Ainsi, si les facteurs sont abéliens, alors le revêtement abélien maximal  $(A, G')$  est une représentation arboréale libre et correspond à un graphe. Pour simplifier, on peut supposer que le sous-groupe caractéristique choisi  $N = G'G_1^{r_1} \cdots G_n^{r_n}$  est en fait égal à  $G'$  en prenant par exemple les  $G_i$  abéliens finis et  $r_i = |G_i|$ .

Pour l'arbre  $A$ , on peut prendre le revêtement universel (au sens des graphes de groupes) d'un arbre de groupes  $\mathbb{X}$  en forme d'étoile avec  $n$  sommets étiquetés par les groupes  $G_1, \dots, G_n$ , tous reliés à un sommet commun sans étiquette (voir Figure 5).

Pour représenter le graphe  $G' \backslash A$ , on peut s'intéresser d'abord à la fibre du sommet sans étiquette  $v_0$  de  $\mathbb{X} = G \backslash A$  (en noir sur la Figure 5). Le groupe  $\text{Deck}(p) \cong G/G' \cong G_1 \times \cdots \times G_n$  agit simplement transitivement sur cette fibre, donc cette dernière forme une grille torique. Comme on sait de plus que  $A$  est le revêtement universel (au sens des graphes) de  $G' \backslash A$ , on connaît la géométrie locale de  $G' \backslash A$  : chaque sommet de la fibre de  $v_0$  est incident à une arête pour chacun des facteurs  $G_i$ . À l'autre extrémité de chacune de ces arêtes, on trouve un sommet de la fibre du sommet d'étiquette  $G_i$ , qui est de valence  $|G_i|$ . On sait de plus que  $\text{Deck}(p) \cong G_1 \times \cdots \times G_n$  agit sur les sommets de la fibre de  $v_0$  de manière torique, et  $G_i \subseteq \text{Deck}(p)$  stabilise toute la fibre du sommet de  $\mathbb{X}$  d'étiquette  $G_i$ . Cela permet d'obtenir un dessin du graphe  $G' \backslash A$  (qu'on voit aussi comme un dessin de la représentation arboréale  $(A, G')$ ) comme dans la Figure 5.

On gardera en tête cette image des revêtements abéliens caractéristiques  $(A, N)$ , en se souvenant que dans le cas général où les facteurs  $G_i$  ne sont pas forcément abéliens ni finis, l'action de  $N$  sur  $A$  n'est plus libre, donc le graphe de groupes  $N \backslash A$  a des étiquettes de sommets.

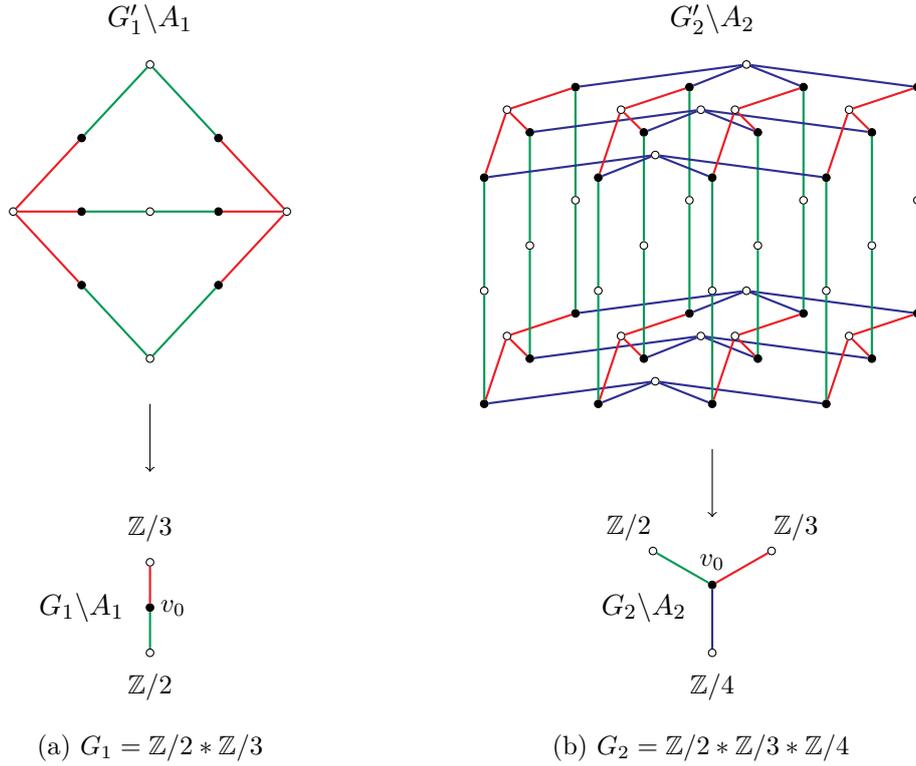


FIGURE 5 – Exemples de revêtements abéliens maximaux associés à des produits libres

### 3.2 Générateurs et relations de $\text{Out}(G)$

Pour construire un scindement de l'épimorphisme  $\text{FHE}(p) \rightarrow \text{HE}(A, G)$ , nous utiliserons comme Bridson et Vogtmann une présentation de  $\text{HE}(A, G) \cong \text{Out}(G)$ . Pour cela, on se base sur les travaux de Fuchs-Rabinovich [7], qui donnent une présentation de  $\text{Aut}(G)$ . Il suffira ensuite d'ajouter des relations correspondant au fait de quotienter par les automorphismes intérieurs pour obtenir une présentation de  $\text{Out}(G)$ .

Dans le cas où  $G$  n'a pas de facteur libre, Fuchs-Rabinovich [7] définit trois types de générateurs pour  $\text{Aut}(G)$ .

**Notation 3.3.** Soit  $G = G_1 * \dots * G_n$  un produit libre de groupes librement indécomposables et non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ .

Automorphismes des facteurs : Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , et  $\bar{\varphi}_i \in \text{Aut}(G_i)$ , on pose

$$\begin{aligned} \varphi_i : g_i \in G_i &\mapsto \bar{\varphi}_i(g_i), \\ g_j \in G_j &\mapsto g_j \quad \text{si } j \neq i. \end{aligned}$$

On note  $\Phi_i = \{\varphi_i, \bar{\varphi}_i \in \text{Aut}(G_i)\}$ . Les éléments de  $\Phi_i$  sont appelés automorphismes du facteur  $G_i$  et on note  $\Phi = \bigcup_i \Phi_i$ .

Automorphismes de permutation : Étant donnés  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $G_i \cong G_j$ , on fixe un isomorphisme  $\bar{\omega}_{ij} : G_i \rightarrow G_j$ . On suppose que les choix ont été faits de sorte

que  $\bar{\omega}_{ii} = \text{id}_{G_i}$  et  $\bar{\omega}_{jk}\bar{\omega}_{ij} = \omega_{ik}$ . Si  $i \neq j$ , on considère

$$\begin{aligned}\omega_{ij} : g_i \in G_i &\mapsto \bar{\omega}_{ij}(g_i), \\ g_j \in G_j &\mapsto \bar{\omega}_{ji}(g_j), \\ g_k \in G_k &\mapsto g_k \quad \text{si } k \neq i, j,\end{aligned}$$

et on pose  $\Omega = \{\omega_{ij}, i \neq j, G_i \cong G_j\}$ . Les éléments de  $\Omega$  sont appelés automorphismes de permutation.

Twists de Dehn : Étant donnés  $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$  et  $\gamma_i \in G_i$ , on définit

$$\begin{aligned}\alpha_{ij}^{(\gamma_i)} : g_j \in G_j &\mapsto \gamma_i^{-1} g_j \gamma_i, \\ g_k \in G_k &\mapsto g_k \quad \text{si } k \neq j.\end{aligned}$$

On note  $A_{ij} = \{\alpha_{ij}^{(\gamma_i)}, \gamma_i \in G_i\}$  et  $A = \bigcup_{i \neq j} A_{ij}$ . Les éléments de  $A$  sont appelés twists de Dehn.

Un système de relations pour  $\text{Aut}(G)$  est donné par le théorème suivant. Notons qu'on considère comme donnés les groupes  $\text{Aut}(G_i) \cong \Phi_i$  et  $G_i \cong A_{ij}$ .

**Théorème 3.4** (Fuchs-Rabinovich [7]). *Soit  $G = G_1 * \dots * G_n$  un produit libre de groupes librement indécomposables et non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ . Alors  $\text{Aut}(G)$  est engendré par les automorphismes des facteurs, les automorphismes de permutation et les twists de Dehn. De plus, les relations ci-dessous forment une présentation de  $\text{Aut}(G)$  :*

- (1)  $\varphi_i \varphi_j = \varphi_j \varphi_i$  pour  $\varphi_i \in \Phi_i, \varphi_j \in \Phi_j, i \neq j$ .
- (2)  $\varphi_i \alpha_{jk}^{(\gamma_j)} = \alpha_{jk}^{(\gamma_j)} \varphi_i$  pour  $\varphi_i \in \Phi_i, \gamma_j \in G_j, i \neq j$ .
- (3)  $\varphi_i \alpha_{ik}^{(\gamma_i)} = \alpha_{ik}^{(\varphi_i \gamma_i)} \varphi_i$  pour  $\varphi_i \in \Phi_i, \gamma_i \in G_i$ .
- (4)  $\alpha_{ij}^{(\gamma_i)} \alpha_{kl}^{(\gamma_k)} = \alpha_{kl}^{(\gamma_k)} \alpha_{ij}^{(\gamma_i)}$  pour  $\gamma_i \in G_i, \gamma_k \in G_k, k \neq j$  et  $\ell \neq i, j$ .
- (5)  $\alpha_{ki}^{(\gamma_k)} \alpha_{ij}^{(\gamma_i)} \left( \alpha_{ki}^{(\gamma_k)} \right)^{-1} = \left( \alpha_{kj}^{(\gamma_k)} \right)^{-1} \alpha_{ij}^{(\gamma_i)} \alpha_{kj}^{(\gamma_k)}$  pour  $\gamma_i \in G_i, \gamma_k \in G_k$ .<sup>1</sup>
- (6)  $\omega_{ij} \varphi_i = \varphi_j \omega_{ij}$  si  $\varphi_i \in \Phi_i$  et  $\varphi_j \in \Phi_j$  sont reliés par  $(\omega_{ij} \varphi_i)|_{G_i} = (\varphi_j \omega_{ij})|_{G_i}$ .
- (7)  $\omega_{ij} \varphi_k = \varphi_k \omega_{ij}$  pour  $k \neq i, j$ .
- (8)  $\omega_{ij} \alpha_{ij}^{(\gamma_i)} = \alpha_{ji}^{(\omega_{ij} \gamma_i)} \omega_{ij}$  pour  $\gamma_i \in G_i$ .
- (9)  $\omega_{ij} \alpha_{ik}^{(\gamma_i)} = \alpha_{jk}^{(\omega_{ij} \gamma_i)} \omega_{ij}$  pour  $\gamma_i \in G_i$ .
- (10)  $\omega_{ij} \alpha_{ki}^{(\gamma_k)} = \alpha_{kj}^{(\gamma_k)} \omega_{ij}$  pour  $\gamma_k \in G_k$ .
- (11)  $\omega_{ij} \alpha_{kl}^{(\gamma_k)} = \alpha_{kl}^{(\gamma_k)} \omega_{ij}$  pour  $\gamma_k \in G_k, k, \ell \neq i, j$ .

Pour en déduire une présentation de  $\text{Out}(G)$ , il suffit d'ajouter des relations dont la clôture normale est le sous-groupe  $\text{Inn}(G)$  des automorphismes intérieurs. Pour écrire la présentation obtenue, on identifie les générateurs de  $\text{Aut}(G)$  à leurs images dans  $\text{Out}(G)$ .

**Corollaire 3.5.** *Soit  $G = G_1 * \dots * G_n$  un produit libre de groupes librement indécomposables et non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ . Alors  $\text{Out}(G)$  est engendré par les automorphismes des facteurs, les automorphismes de permutations et les twists de Dehn. De plus, les relations (1) – (11) du Théorème 3.4, complétées par la relation (0) ci-dessous, forment une présentation de  $\text{Out}(G)$  :*

$$(0) \quad \varphi_i \prod_{j \neq i} \alpha_{ij}^{(\gamma_i)} = 1 \quad \text{pour } \gamma_i \in G_i, \text{ avec } \varphi_i \in \Phi_i \text{ donné par } \varphi_i|_{G_i} = \text{ad} \left( \gamma_i^{-1} \right). \quad \square$$

1. On a corrigé ici une faute de frappe de Fuchs-Rabinovich [7]. Voir [10, § 4].

### 3.3 Relèvement des équivalences d'homotopie

Disposant d'une présentation de  $\mathrm{HE}(A, G) \cong \mathrm{Out}(G)$ , nous sommes maintenant prêts à relever les équivalences d'homotopie de la représentation arboréale  $(A, G)$  à un revêtement caractéristique abélien  $(A, N)$ . Nous travaillerons en fait dans le cadre algébrique, c'est-à-dire que nous scinderons l'épimorphisme  $\mathrm{Aut}(G)/N \rightarrow \mathrm{Out}(G)$ , en nous laissant guider par l'intuition géométrique fournie par le lien avec les revêtements de représentations arboréales. La preuve pourrait aussi s'écrire dans le langage des représentations arboréales, mais elle en serait alourdie dans le cas présent.

Notons  $S$  la partie génératrice donnée plus haut pour  $\mathrm{Out}(G)$ . Remarquons que chaque générateur  $s \in S$  a été défini en spécifiant un représentant, que l'on notera  $s_0$ , de  $s$  dans  $\mathrm{Aut}(G)$ . On note  $R \subseteq F(S)$  l'ensemble des relations de  $\mathrm{Aut}(G)$  et  $R_1$  les relations supplémentaires de  $\mathrm{Out}(G)$ . On a donc  $\mathrm{Out}(G) = \langle S \mid R \cup R_1 \rangle$ . Étant donné un mot  $w$  du groupe libre  $F(S)$ , on note  $w_0 \in F(S_0)$  le mot correspondant obtenu par la substitution  $s \mapsto s_0$  (avec  $S_0 = \{s_0, s \in S\}$ ).

On cherche à définir un scindement de la projection  $\mathrm{Aut}(G)/N \rightarrow \mathrm{Out}(G)$ . Pour cela, il s'agit d'associer à chaque générateur  $s \in S$  un élément  $\hat{s} \in \mathrm{Aut}(G)$  de sorte que

$$\hat{s}^{-1}s_0 \in \mathrm{Inn}(G),$$

et que pour tout  $r \in R \cup R_1$ , le relevé  $\hat{r}$  de la relation  $r$  à  $\mathrm{Aut}(G)$  satisfasse

$$\hat{r} \in \mathrm{Inn}(N).$$

Si on prend  $\hat{s} = s_0$  pour tout  $s$ , les relations  $r \in R$  qui sont satisfaites dans  $\mathrm{Aut}(G)$  vont automatiquement vérifier  $\hat{r} = r_0 = 1$ , mais les relations de  $R_1$  ne vont pas se relever trivialement.

Il s'agit donc d'apporter une correction aux relevés  $\hat{s}$  des différents générateurs  $s \in S$  de manière à satisfaire toutes les relations de  $\mathrm{Out}(G)$ . Dans le cas où  $G$  est un groupe libre, Bridson et Vogtmann [3] corrigent les relevés des générateurs correspondant à des transvections par une translation le long d'un axe ; autrement dit, ils font agir une composante du groupe de Galois du revêtement (qui se décompose en produit direct) sur les relevés. Vu l'action du groupe de Galois sur le revêtement pour les représentations arboréales (voir 2.4), cela revient à composer les relevés de certains générateurs par une conjugaison. Cette idée mène à la preuve suivante.

**Proposition 3.6.** *Soit  $G = G_1 * \dots * G_n$  un produit libre de groupes abéliens non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on se donne un entier  $r_i \in \mathbb{Z}$  premier avec  $n - 1$ , de telle sorte que  $r_i = r_j$  dès que  $G_i \cong G_j$ . On considère le sous-groupe caractéristique  $N = G'G_1^{r_1} \dots G_n^{r_n}$  de  $G$ .*

*Alors la projection  $\mathrm{Aut}(G)/N \rightarrow \mathrm{Out}(G)$  admet un scindement.*

*Démonstration.* Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , comme  $r_i$  est choisi premier avec  $n - 1$ , on peut se donner des entiers  $u_i, t_i \in \mathbb{Z}$  tels que  $u_i(n - 1) + t_i r_i = 1$ . On relève alors les générateurs de  $\mathrm{Out}(G)$  comme suit :

- Pour un automorphisme de facteur  $\varphi_i \in \Phi_i$ , on pose  $\hat{\varphi}_i = (\varphi_i)_0$  le relevé standard.
- Pour une permutation de facteurs  $\omega_{ij} \in \Omega$ , on pose  $\hat{\omega}_{ij} = (\omega_{ij})_0$  le relevé standard.
- Pour un twist de Dehn  $\alpha_{ij}^{(\gamma_i)} \in A_{ij}$ , on corrige le relevé standard par

$$\hat{\alpha}_{ij}^{(\gamma_i)} = \mathrm{ad}(\gamma_i^{u_i}) \circ (\alpha_{ij}^{(\gamma_i)})_0.$$

Il s'agit de vérifier que les images des  $\hat{\varphi}_i$ ,  $\hat{\omega}_{ij}$  et  $\hat{\varphi}_{ij}^{(\gamma_i)}$  dans  $\text{Aut}(G)/N$  satisfont les relations (0) – (11) de  $\text{Out}(G)$ .

Comme les relevés des automorphismes des facteurs et des permutations de facteurs ne sont pas corrigés, les relations faisant intervenir seulement ces types d'automorphismes sont automatiquement satisfaites. C'est le cas des relations (1), (6) et (7). Il reste alors quatre types de relations :

- (2) – (3) Les relations liant les automorphismes des facteurs aux twists de Dehn. On vérifie par le calcul que celles-ci sont satisfaites dans  $\text{Aut}(G)$ , et donc aussi dans  $\text{Aut}(G)/N$ .
- (8) – (11) Les relations liant les permutations de facteurs aux twists de Dehn. De même, on vérifie qu'elles sont satisfaites dans  $\text{Aut}(G)$ , donc dans  $\text{Aut}(G)/N$ .
- (4) – (5) Les relations liant les twists de Dehn entre eux. On obtient

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{ij}^{(\gamma_i)} \hat{\alpha}_{kl}^{(\gamma_k)} &= \text{ad}([\gamma_i^{u_i}, \gamma_k^{u_k}]) \circ \hat{\alpha}_{kl}^{(\gamma_k)} \hat{\alpha}_{ij}^{(\gamma_i)}, \\ \hat{\alpha}_{ki}^{(\gamma_k)} \hat{\alpha}_{ij}^{(\gamma_i)} \left(\hat{\alpha}_{ki}^{(\gamma_k)}\right)^{-1} &= \text{ad}\left([\gamma_k^{u_k-1}, \gamma_i^{u_i}] [\gamma_i^{u_i}, \gamma_k^{-u_k}]\right) \circ \left(\hat{\alpha}_{kj}^{(\gamma_k)}\right)^{-1} \hat{\alpha}_{ij}^{(\gamma_i)} \hat{\alpha}_{kj}^{(\gamma_k)},\end{aligned}$$

donc ces relations sont satisfaites dans  $\text{Aut}(G)/N$  (mais pas dans  $\text{Aut}(G)$ ).

- (0) La relation spécifique à  $\text{Out}(G)$ . Si  $\varphi_i \in \Phi_i$  est donné par  $\varphi_i|_{G_i} = \text{ad}(\gamma_i^{-1})$ , le calcul donne

$$\hat{\varphi}_i \prod_{j \neq i} \hat{\alpha}_{ij}^{(\gamma_i)} = \text{ad}(\gamma_i^{u_i(n-1)-1}) \circ \hat{\varphi}_i = \text{ad}(\gamma_i^{t_i r_i}) \circ \hat{\varphi}_i.$$

Comme  $G_i$  est supposé abélien, on a  $\hat{\varphi}_i = \text{id}_G$ , et comme  $G_i^{r_i} \subseteq N$ , on a  $\gamma_i^{t_i r_i} \in N$ , donc la dernière relation est satisfaite dans  $\text{Aut}(G)/N$ .

Ainsi, l'application définie sur les générateurs de  $\text{Out}(G)$  par  $s \mapsto \hat{s}$  induit un morphisme de groupes  $\text{Out}(G) \rightarrow \text{Aut}(G)/N$ , qui est bien un scindement de la projection puisque chaque générateur  $s$  est l'image de  $\hat{s}$  dans  $\text{Out}(G)$ .  $\square$

### 3.4 Plongement de $\text{Out}(G)$ dans $\text{Out}(N)$

Sous certaines hypothèses, nous avons pu construire un monomorphisme  $\text{Out}(G) \hookrightarrow \text{Aut}(G)/N$  en scindant l'épimorphisme  $\text{Aut}(G)/N \twoheadrightarrow \text{Out}(G)$ . Comme  $N$  est un sous-groupe caractéristique de  $G$ , on dispose de plus d'un morphisme de restriction  $\text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(N)$  donné par  $\psi \mapsto \psi|_N$ , et qui induit un morphisme  $\text{Aut}(G)/N \rightarrow \text{Out}(N)$ . Le lemme suivant généralise un résultat dû à Collins [4] sur l'injectivité du morphisme de restriction, en adaptant un argument donné par Bridson et Vogtmann [3] dans le cas où  $G$  est un groupe libre.

**Lemme 3.7.** *Soit  $G = G_1 * \dots * G_n$  un produit libre de groupes non triviaux, avec  $n \geq 2$ . On suppose que  $G \not\cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ . Si  $N$  est un sous-groupe caractéristique d'indice fini de  $G$ , alors le morphisme de restriction  $\text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(N)$  est injectif.*

*Démonstration.* Soit  $\psi \in \text{Aut}(G)$  tel que  $\psi|_N = \text{id}_N$ . On note  $k = [G : N]$ . Ainsi, pour tout  $x \in G$ , comme  $x^k \in N$ , on a

$$\psi(x)^k = \psi(x^k) = x^k.$$

Si  $x$  n'appartient pas à un conjugué d'un des facteurs  $G_i$ , on en déduit en considérant les formes normales de  $x$  et  $\psi(x)$  que  $\psi(x) = x$ .

Notons maintenant que, pour  $g_i \in G_i \setminus \{1\}$  et  $g_j \in G_j \setminus \{1\}$ , avec  $i \neq j$ , on a

$$\psi(g_i) \psi(g_j)^{-1} = \psi(g_i g_j^{-1}) = g_i g_j^{-1},$$

d'où  $g_i^{-1} \psi(g_i) = g_j^{-1} \psi(g_j)$ . Il existe donc un élément  $\gamma \in G$  tel que pour tout  $x \in \bigcup_i G_i \setminus \{1\}$ ,

$$\psi(x) = x\gamma.$$

Pour  $g_i \in G_i \setminus \{1\}$  et  $g_j \in G_j \setminus \{1\}$ , avec  $i \neq j$ , on a de plus

$$g_j \gamma g_i \gamma = \psi(g_j) \psi(g_i) = \psi(g_j g_i) = g_j g_i,$$

d'où  $g_i = \gamma g_i \gamma$ .

Si  $\gamma \neq 1$ , écrivons sous forme normale

$$\gamma = w_{i_1} \cdots w_{i_r},$$

avec  $r \geq 1$ ,  $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i_\ell \neq i_{\ell+1}$  et  $w_{i_\ell} \in G_{i_\ell} \setminus \{1\}$ . On a donc, pour tout  $x \in \bigcup_i G_i \setminus \{1\}$ ,

$$x = w_{i_1} \cdots w_{i_r} x w_{i_1} \cdots w_{i_r}. \quad (*)$$

Si  $i_1 = i_r$ , alors on peut prendre  $j \neq i_1$  (car  $n \geq 2$ ),  $x \in G_j \setminus \{1\}$ , de sorte que le membre de droite de (\*) soit réduit, ce qui est impossible. Ainsi,  $i_1 \neq i_r$ . Comme le membre de droite de (\*) est non réduit, il faut donc que tout choix de  $x \in \bigcup_i G_i \setminus \{1\}$  satisfasse  $x \in \{w_{i_r}^{-1}, w_{i_1}^{-1}\}$ . C'est impossible car  $\sum_i (|G_i| - 1) \geq 3$  puisque  $G \not\cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$  et  $n \geq 2$ .

Ainsi, on a  $\gamma = 1$ , donc  $\psi|_{G_i} = \text{id}_{G_i}$  pour tout  $i$ , d'où  $\psi = \text{id}_G$ .  $\square$

En combinant ce lemme avec la Proposition 3.6 (qui fournit un plongement  $\text{Out}(G) \hookrightarrow \text{Aut}(G)/N$ ), on obtient le théorème annoncé.

**Théorème A.** Soit  $G = G_1 * \cdots * G_n$  un produit libre de groupes abéliens non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ , avec  $n \geq 2$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on se donne un entier  $r_i \in \mathbb{Z}$  premier avec  $n-1$ , de telle sorte que  $r_i = r_j$  dès que  $G_i \cong G_j$ . On considère le sous-groupe caractéristique  $N = G' G_1^{r_1} \cdots G_n^{r_n}$  de  $G$ . Alors il existe un plongement

$$\text{Out}(G) \hookrightarrow \text{Out}(N).$$

*Démonstration.* La Proposition 3.6 donne un plongement  $\text{Out}(G) \hookrightarrow \text{Aut}(G)/N$ . On a de plus un diagramme commutatif avec des lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & \text{Aut}(G) & \longrightarrow & \text{Aut}(G)/N \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & \text{Aut}(N) & \longrightarrow & \text{Out}(N) \longrightarrow 1 \end{array}$$

Le Lemme 3.7 implique que le morphisme  $\text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(N)$  est injectif si  $G \not\cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ ; il s'ensuit alors que  $\text{Aut}(G)/N \rightarrow \text{Out}(N)$  est injectif grâce au diagramme ci-dessus. Par composition, on obtient donc un plongement  $\text{Out}(G) \hookrightarrow \text{Aut}(G)/N \hookrightarrow \text{Out}(N)$ .

Dans le cas où  $G \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ , on a  $\text{Out}(G) \cong \mathbb{Z}/2$ . On a de plus  $N = G' \cong \mathbb{Z}$  (si  $r_1$  est pair) ou  $N = G$  (si  $r_1$  est impair); dans tous les cas,  $\text{Out}(N) \cong \mathbb{Z}/2$ , donc il existe bien un plongement  $\text{Out}(G) \hookrightarrow \text{Out}(N)$ .  $\square$

Dans le cas où les facteurs sont finis et d'ordres premiers avec  $n-1$ , on peut prendre  $r_i = |G_i|$  pour tout  $i$ , de sorte que  $N = G'$  est un sous-groupe libre de  $G$  (d'après le Lemme 3.2). On obtient ainsi le corollaire suivant.

**Corollaire A.** Soit  $G = G_1 * \cdots * G_n$  un produit libre de groupes abéliens finis, avec  $n \geq 2$ . On suppose que  $n - 1$  est premier avec l'ordre  $|G_i|$  de chaque facteur  $G_i$ . Alors il existe un sous-groupe libre  $F$  de rang fini et d'indice fini dans  $G$  tel qu'on ait un plongement

$$\text{Out}(G) \hookrightarrow \text{Out}(F).$$

En particulier,  $\text{Out}(G)$  admet une représentation libre fidèle. □

### 3.5 Générateurs et relations avec un facteur libre

On s'intéresse maintenant au cas où  $G = G_1 * \cdots * G_n$  est un produit libre de groupes librement indécomposables, éventuellement isomorphes à  $\mathbb{Z}$ . On ordonne les facteurs de sorte que  $G_1 \cong \cdots \cong G_d \cong \mathbb{Z}$ , et  $G_{d+1}, \dots, G_n \not\cong \mathbb{Z}$ . Autrement dit,

$$G = F_d * G_{d+1} * \cdots * G_n,$$

avec  $F_d$  libre de rang  $d$ .

Une différence majeure par rapport au cas où  $d = 0$  est que, comme le montre le Théorème de Grushko, il y a maintenant significativement plus de flexibilité dans la décomposition de  $G$  en produit libre. En particulier, on ne peut plus construire de sous-groupe caractéristique de  $G$  comme dans le Lemme 3.1. À la place, nous travaillerons avec le sous-groupe caractéristique  $N = G'G^r$  pour un certain  $r \in \mathbb{Z}$ .

Nielsen [17], et plus récemment Gersten [9], ont donné une présentation de  $\text{Aut}(F_d)$ , Fuchs-Rabinovich [7] a fait de même pour  $\text{Aut}(G_{d+1} * \cdots * G_n)$ , comme on l'a vu plus haut. En fait, dans un second article [8], Fuchs-Rabinovich donne une présentation complète de  $\text{Aut}(G)$ . La présentation obtenue devient assez longue, mais elle généralise les résultats pour la partie libre et pour la partie sans facteur libre de manière relativement naturelle.

Les générateurs de Fuchs-Rabinovich pour  $\text{Aut}(G)$  sont les suivants.

**Notation 3.8.** Soit  $G = G_1 * \cdots * G_d * G_{d+1} * \cdots * G_n$ , avec  $G_1, \dots, G_d$  isomorphes à  $\mathbb{Z}$  et munis de générateurs respectifs  $a_1, \dots, a_d$ , et  $G_{d+1}, \dots, G_n$  librement indécomposables non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ .

Automorphismes des facteurs : Pour  $i \in \{d+1, \dots, n\}$ , on considère le groupe  $\Phi_i$  des automorphismes du facteur  $G_i$  (voir Notation 3.3).

Réflexions : Pour  $i \in \{1, \dots, d\}$ , on pose  $\tau_i : a_i \mapsto a_i^{-1}$ . L'automorphisme  $\tau_i$  est appelé réflexion de  $G_i$  et on a  $\Phi_i = \{\text{id}, \tau_i\}$ .

Automorphismes de permutation : On considère  $\Omega = \{\omega_{ij}, i \neq j, G_i \cong G_j\}$  le groupe des automorphismes de permutation, défini comme dans la Notation 3.3, avec de plus la convention que  $\omega_{ij} : a_i \mapsto a_j$  et  $a_j \mapsto a_i$  lorsque  $i, j \leq d$ .

Twists de Dehn : Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{d+1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ , on considère  $A_{ij}$  le groupe des twists de Dehn de type  $ij$  (voir Notation 3.3). Si  $i \in \{1, \dots, d\}$ , on notera  $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^{(a_i)}$ .

Transvections à droite : Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, \dots, d\}$ ,  $i \neq j$ ,  $\gamma_i \in G_i$ , on définit

$$\begin{aligned} \rho_{ij}^{(\gamma_i)} : a_j \in G_j &\mapsto a_j \gamma_i, \\ g_k \in G_k &\mapsto g_k \quad \text{si } k \neq j. \end{aligned}$$

On note  $P_{ij} = \{\rho_{ij}^{(\gamma_i)}, \gamma_i \in G_i\}$  et  $P = \bigcup_{i \neq j} P_{ij}$ . Les éléments de  $P$  sont appelés transvections à droite. Si  $i \in \{1, \dots, d\}$ , on notera  $\rho_{ij} = \rho_{ij}^{(a_i)}$ .

Transvections à gauche : Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, \dots, d\}$ ,  $i \neq j$ ,  $\gamma_i \in G_i$ , on définit

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}^{(\gamma_i)} : a_j \in G_j &\mapsto \gamma_i a_j, \\ g_k \in G_k &\mapsto g_k \quad \text{si } k \neq j. \end{aligned}$$

On note  $\Lambda_{ij} = \{\lambda_{ij}^{(\gamma_i)}, \gamma_i \in G_i\}$  et  $\Lambda = \bigcup_{i \neq j} \Lambda_{ij}$ . Les éléments de  $\Lambda$  sont appelés transvections à gauche. Si  $i \in \{1, \dots, d\}$ , on notera  $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}^{(a_i)}$ .

Ces notations généralisent à la fois celles de 1.2 et de la Notation 3.3.

On a alors une présentation de  $\text{Aut}(G)$  comme suit.

**Théorème 3.9** (Fuchs-Rabinovich [8]). *Soit  $G = G_1 * \dots * G_d * G_{d+1} * \dots * G_n$  un produit libre de groupes librement indécomposables, avec  $G_1 \cong \dots \cong G_d \cong \mathbb{Z}$  et  $G_{d+1}, \dots, G_n \not\cong \mathbb{Z}$ . Alors  $\text{Aut}(G)$  est engendré par les automorphismes des facteurs, les réflexions, les automorphismes de permutation, les twists de Dehn et les transvections à gauche et à droite. De plus, les relations ci-dessous forment une présentation de  $\text{Aut}(G)$  :*

- (1) – (11) *Les relations du Théorème 3.4, écrites sur tous les indices pour lesquels elles ont un sens.*
- (12) *Les relations de Nielsen [17] de  $\text{Aut}(F_d)$ , écrites sur tous les indices pour lesquels elles ont un sens.*
- (13)  $\alpha_{ij}^{(\gamma_i)} \tau_k = \tau_k \alpha_{ij}^{(\gamma_i)}$  pour  $\gamma_i \in G_i$ ,  $i, j \neq k$ .
- (14)  $\alpha_{ij} \tau_i = \tau_i \alpha_{ij}^{-1}$ .
- (15)  $\rho_{ij}^{(\gamma_i)} \varphi_k = \varphi_k \rho_{ij}^{(\gamma_i)}$  pour  $\gamma_i \in G_i$ ,  $\varphi_k \in \Phi_k$ ,  $i, j \neq k$ .
- (16)  $\rho_{ij}^{(\varphi_i \gamma_i)} \varphi_i = \varphi_i \rho_{ij}^{(\gamma_i)}$  pour  $\gamma_i \in G_i$ ,  $\varphi_i \in \Phi_i$ .
- (17)  $\rho_{ij}^{(\gamma_i)} \alpha_{kl}^{(\gamma_k)} = \alpha_{kl}^{(\gamma_k)} \rho_{ij}^{(\gamma_i)}$  pour  $\gamma_i \in G_i$ ,  $\gamma_k \in G_k$ ,  $i, j \neq k, l$ .
- (18)  $\rho_{ij}^{(\gamma_i)} \alpha_{il}^{(\gamma_i)} = \alpha_{il}^{(\gamma_i)} \rho_{ij}^{(\gamma_i)}$  pour  $\gamma_i \in G_i$ .
- (19)  $\rho_{ij}^{(\gamma_i)} \alpha_{jl} = \alpha_{jl} \rho_{ij}^{(\gamma_i)} \alpha_{il}^{(\gamma_i)}$  pour  $\gamma_i \in G_i$ .<sup>2</sup>
- (20)  $\left(\rho_{kj}^{(\gamma_k)}\right)^{-1} \rho_{ij}^{(\gamma_i)} \rho_{kj}^{(\gamma_k)} \alpha_{ki}^{(\gamma_k)} = \alpha_{ki}^{(\gamma_k)} \rho_{ij}^{(\gamma_i)}$  pour  $\gamma_i \in G_i$ ,  $\gamma_k \in G_k$ .
- (21)  $\alpha_{ji} \rho_{ij}^{(\gamma_i)} = \lambda_{ij}^{(\gamma_i)} \alpha_{ji} \varphi_i$  pour  $\gamma_i \in G_i$  avec  $(\varphi_i)_{|G_i} = \text{ad}(\gamma_i^{-1})$ .
- (22)  $\tau_k \varphi_i = \varphi_i \tau_k$  pour  $\varphi_i \in \Phi_i$ ,  $i \neq k$ .
- (23)  $\tau_i \omega_{kl} = \omega_{kl} \tau_i$  pour  $i \neq k, l$ .

**Remarque.** *Dans le Théorème 3.9, les relations (1) – (12) sont plus nombreuses que la simple union des relations de  $\text{Aut}(F_d)$  et de  $\text{Aut}(G_{d+1} * \dots * G_n)$  : elles incluent par exemple des relations faisant intervenir des twists de Dehn conjuguant un des facteurs  $G_i$  (avec  $i > d$ ) par un élément de  $F_d$ . Cependant, le choix des notations fait qu'elles s'écrivent de la même manière que dans  $\text{Aut}(F_d)$  ou dans  $\text{Aut}(G_{d+1} * \dots * G_n)$ .*

Comme précédemment, on en déduit aisément une présentation de  $\text{Out}(G)$ .

---

2. On a corrigé ici une faute de frappe de Fuchs-Rabinovich [8]. Voir [10, § 4].

**Corollaire 3.10.** *Soit  $G = G_1 * \cdots * G_d * G_{d+1} * \cdots * G_n$  un produit libre de groupes librement indécomposables, avec  $G_1 \cong \cdots \cong G_d \cong \mathbb{Z}$  et  $G_{d+1}, \dots, G_n \not\cong \mathbb{Z}$ . Alors  $\text{Out}(G)$  est engendré par les automorphismes des facteurs, les réflexions, les automorphismes de permutation, les twists de Dehn et les transvections à gauche et à droite. De plus, les relations (1) – (23) du Théorème 3.9, complétées par la relation (0) ci-dessous, forment une présentation de  $\text{Out}(G)$  :*

$$(0) \quad \varphi_i \circ \prod_{\substack{j \leq d \\ j \neq i}} \rho_{ij}^{(\gamma_i)} \left( \lambda_{ij}^{(\gamma_i)} \right)^{(-1)} \circ \prod_{\substack{j > d \\ j \neq i}} \alpha_{ij}^{(\gamma_i)} = 1 \text{ pour } \gamma_i \in G_i, \text{ avec } \varphi_i|_{G_i} = \text{ad} \left( \gamma_i^{-1} \right). \quad \square$$

### 3.6 Résultats de plongements avec un facteur libre

On suppose maintenant que  $G = F_d * G_{d+1} * \cdots * G_n$ , avec  $F_d$  libre de rang  $d$ ,  $G_{d+1}, \dots, G_n$  abéliens (donc librement indécomposables) et non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ . On considère le sous-groupe caractéristique  $N = G^r G^r$ , où  $r \in \mathbb{Z}$  est un entier à fixer. La méthode que nous allons suivre pour construire un scindement de  $\text{Aut}(G)/N \rightarrow \text{Out}(G)$  est la même qu'en 1.2 (pour le cas où  $G = F_d$ ) et qu'en 3.3 (pour le cas où  $G = G_{d+1} * \cdots * G_n$ ) : on choisit pour chaque générateur  $s \in \text{Out}(G)$  un corrigé  $\hat{s} \in \text{Aut}(G)/N$  du relevé standard  $s_0 \in \text{Aut}(G)/N$ , de sorte que les relevés corrigés  $\hat{s}$  satisfont les relations de  $\text{Out}(G)$ .

En fait, les générateurs de  $\text{Out}(G)$  dans ce contexte sont tous du même type que ceux utilisés dans le cas où  $G = F_d$  (pour les transvections et les réflexions) ou dans le cas où  $G = G_{d+1} * \cdots * G_n$  (pour les automorphismes des facteurs, les automorphismes de permutation et les twists de Dehn). Nous allons donc simplement prendre les mêmes corrections que précédemment. Ainsi, les relations (1) – (12) du Théorème 3.9 seront automatiquement satisfaites, et il suffira de vérifier (13) – (23).

**Proposition 3.11.** *Soit  $G = F_d * G_{d+1} * \cdots * G_n$ , avec  $F_d$  libre de rang  $d$ ,  $G_{d+1}, \dots, G_n$  abéliens non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ . On se donne un entier  $r \in \mathbb{Z}$  premier avec  $n - 1$  et on considère le sous-groupe caractéristique  $N = G^r G^r$  de  $G$ .*

*Alors la projection  $\text{Aut}(G)/N \rightarrow \text{Out}(G)$  admet un scindement.*

*Démonstration.* On peut se donner des entiers  $u, t \in \mathbb{Z}$  tels que  $u(n - 1) + tr = 1$ . On relève alors les générateurs de  $\text{Out}(G)$  comme suit :

- Pour les automorphismes des facteurs, les permutations de facteurs et les twists de Dehn, on effectue les mêmes corrections que dans la preuve de la Proposition 3.6 (en remplaçant  $u_i$  par  $u$ ).
- Les transvections à droite ne sont pas corrigées (on garde le relevé standard).
- Les transvections à gauche sont corrigées par  $\hat{\lambda}_{ij}^{(\gamma_i)} = \text{ad} \left( \gamma_i^{-u} \right) \circ \left( \lambda_{ij}^{(\gamma_i)} \right)_0$ .
- Les réflexions sont corrigées par  $\hat{\tau}_i = \text{ad} \left( a_i^u \right) \circ (\tau_i)_0$ .

Notons que les corrections des transvections et des réflexions ne sont autres qu'une reformulation algébrique des corrections de Bridson et Vogtmann [3] (voir 1.2).

Il s'ensuit que les relations (1) – (12) du Théorème 3.9 sont bien satisfaites : leur vérification ne serait qu'une réécriture des calculs de la Proposition 3.6 (pour les relations (1) – (11)) et de ceux de Bridson et Vogtmann [3] (pour (12)). De plus, les relations (15) – (16) sont satisfaites car elles ne font intervenir que des générateurs dont on ne corrige pas les relevés.

On vérifie que relations (14) – (18), (20) et (22) – (23) sont satisfaites dans  $\text{Aut}(G)$ . On donne les résultats des calculs pour les autres relations, et on voit qu'elles sont satisfaites dans  $\text{Aut}(G)/N$  :

$$(13) \hat{\alpha}_{ij}^{(\gamma_i)} \hat{\tau}_k = \text{ad}([\gamma_i^u, a_k^u]) \circ \hat{\tau}_k \hat{\alpha}_{ij}^{(\gamma_i)}.$$

$$(19) \hat{\rho}_{ij}^{(\gamma_i)} \hat{\alpha}_{j\ell} = \text{ad}\left((a_j \gamma_i)^u \gamma_i^{-u} a_j^{-u}\right) \circ \hat{\alpha}_{j\ell} \hat{\rho}_{ij}^{(\gamma_i)} \hat{\alpha}_{i\ell}^{(\gamma_i)}.$$

$$(21) \hat{\alpha}_{ji} \hat{\rho}_{ij}^{(\gamma_i)} = \text{ad}\left(a_j^u (\gamma_i a_j)^{-u} \gamma_i^u\right) \circ \hat{\lambda}_{ij}^{(\gamma_i)} \hat{\alpha}_{ji} \hat{\varphi}_i.$$

$$(0) \hat{\varphi}_i \circ \prod_{\substack{j \leq d \\ j \neq i}} \hat{\rho}_{ij}^{(\gamma_i)} \left(\hat{\lambda}_{ij}^{(\gamma_i)}\right)^{(-1)} \circ \prod_{\substack{j > d \\ j \neq i}} \hat{\alpha}_{ij}^{(\gamma_i)} = \text{ad}\left(\gamma_i^{u(n-1)-1}\right) = \text{ad}(\gamma_i^{tr}).$$

Ainsi,  $s \mapsto \hat{s}$  donne bien un scindement du morphisme  $\text{Aut}(G)/N \twoheadrightarrow \text{Out}(G)$ .  $\square$

Le Lemme 3.7 qui prouvait l'injectivité du morphisme de restriction  $\text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(N)$  était indépendant du fait d'avoir des facteurs libres ou non. Il reste donc valable dans le cadre qui nous intéresse maintenant, ce qui donne le résultat suivant avec la même preuve que le Théorème A.

**Théorème B.** *Soit  $G = F_d * G_{d+1} * \dots * G_n$ , avec  $n \geq 2$ ,  $F_d$  libre de rang  $d$ ,  $G_{d+1}, \dots, G_n$  abéliens non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ . On se donne un entier  $r \in \mathbb{Z}$  premier avec  $n-1$  et on considère le sous-groupe caractéristique  $N = G^r$  de  $G$ . Alors il existe un plongement*

$$\text{Out}(G) \hookrightarrow \text{Out}(N). \quad \square$$

**Remarque.** *Lorsque  $d = n$ , on retrouve le résultat de Bridson et Vogtmann [3] (voir Théorème 1.3 dans ce texte).*

En prenant  $r = |G_{d+1}| \cdots |G_n|$ , on obtient une généralisation du Corollaire A.

**Corollaire B1.** *Soit  $G = F_d * G_{d+1} * \dots * G_n$ , avec  $n \geq 2$ ,  $F_d$  libre de rang  $d$ ,  $G_{d+1}, \dots, G_n$  abéliens finis. On suppose que  $n-1$  est premier avec l'ordre  $|G_i|$  de chaque facteur  $G_i$ . Alors il existe un sous-groupe libre  $F$  de rang fini et d'indice fini dans  $G$  tel qu'on ait un plongement*

$$\text{Out}(G) \hookrightarrow \text{Out}(F).$$

En particulier,  $\text{Out}(G)$  admet une représentation libre fidèle.  $\square$

On remarque que, quitte à augmenter le rang du facteur libre, on peut s'arranger pour avoir  $n-1$  premier avec  $|G_i|$  pour tout  $i$ . On obtient ainsi un second corollaire.

**Corollaire B2.** *Soit  $G = F_d * G_{d+1} * \dots * G_n$ , avec  $F_d$  libre de rang  $d$ ,  $G_{p+1}, \dots, G_n$  abéliens finis. Alors il existe un entier  $k \geq 0$  tel que  $\text{Out}(F_k * G)$  admette une représentation libre fidèle.  $\square$*

### 3.7 Application aux groupes de Coxeter universels

Considérons le groupe  $W_n = \langle x_1, \dots, x_n \mid x_1^2, \dots, x_n^2 \rangle$ . On appelle  $W_n$  le *groupe de Coxeter universel* de rang  $n$ ; c'est le produit libre de  $n$  copies de  $\mathbb{Z}/2$ , et c'est sans doute l'exemple le plus simple de produit libre de groupes librement indécomposables non isomorphes à  $\mathbb{Z}$ . Il est donc naturel de se demander quelles propriétés  $\text{Out}(W_n)$  partage avec  $\text{Out}(F_n)$ .

On s'intéresse en particulier aux représentations libres de  $\text{Out}(W_n)$ . Pour le groupe  $\text{Aut}(W_n)$ , Mühlherr [16] a montré qu'il existe un plongement  $\text{Aut}(W_n) \hookrightarrow \text{Aut}(F_{n-1})$  pour tout  $n \geq 3$ . À l'inverse, Varghese [20] a montré que, si  $n \geq 4$  et  $m \leq n-2$ , alors tout morphisme de  $\text{Aut}(W_n)$  vers  $\text{Aut}(F_m)$ ,  $\text{Out}(F_m)$  ou  $GL_m(\mathbb{Z})$  a image finie.

On s'intéresse à la question analogue pour les automorphismes extérieurs : on cherche à savoir pour quels entiers  $n, m$  il existe des représentations libres fidèles  $\text{Out}(W_n) \hookrightarrow \text{Out}(F_m)$ . En application des résultats de ce texte, on a le corollaire suivant.

**Corollaire 3.12.** *Si  $n$  est pair et  $m = 2^{n-1}(n-2) + 1$ , alors il existe un plongement*

$$\text{Out}(W_n) \hookrightarrow \text{Out}(F_m).$$

*Démonstration.* D'après le Théorème A (avec  $r_i = 2$  pour tout  $i$ ), il existe un plongement  $\text{Out}(W_n) \hookrightarrow \text{Out}(W'_n)$ . Considérons de plus une représentation arboréale  $(A, W_n)$  telle que  $W_n \setminus A$  est un arbre de groupes à  $n$  sommets étiquetés par  $\mathbb{Z}/2$  et  $n-1$  arêtes sans étiquette. Le Lemme 3.2 implique que  $W'_n$  agit librement sur  $A$ , donc  $W'_n \cong F_m$ , où  $m$  est le genre du graphe  $W'_n \setminus A$ . Observons que  $W_n/W'_n \cong (\mathbb{Z}/2)^n$  et que, dans  $A$ , les stabilisateurs de sommets sous l'action de  $W_n/W'_n$  ont ordre 2 et les stabilisateurs d'arêtes sont triviaux. Ainsi, chaque orbite d'arêtes pour  $W_n$  correspond à  $2^n$  orbites d'arêtes pour  $W'_n$ , et chaque orbite de sommets pour  $W_n$  correspond à  $2^{n-1}$  orbites de sommets pour  $W'_n$ . Il s'ensuit que  $W'_n \setminus A$  est un graphe à  $(n-1)2^n$  arêtes et  $n2^{n-1}$  sommets, d'où

$$m = |E(W'_n \setminus A)| - |V(W'_n \setminus A)| + 1 = 2^{n-1}(n-2) + 1. \quad \square$$

On n'a aucune raison de croire que ce résultat couvre toutes les valeurs possibles de  $n, m$  pour lesquelles il existe des plongements  $\text{Out}(W_n) \hookrightarrow \text{Out}(F_m)$ . Pour le voir, intéressons-nous au cas où  $n = 3$ , sur lequel le Corollaire 3.12 ne dit rien. Le groupe  $\text{Out}(W_3)$  est suffisamment simple pour être calculé explicitement, et on peut en construire une représentation libre fidèle à la main.

**Proposition 3.13.** (i)  $\text{Out}(W_3) \cong W_3 \rtimes \mathfrak{S}_3$ , où l'action de  $\mathfrak{S}_3$  sur  $W_3$  est par permutation des générateurs.

(ii) Il existe un plongement  $\text{Out}(W_3) \hookrightarrow \text{Out}(F_4)$ .

*Démonstration.* (i) On a un morphisme  $\text{Out}(W_3) \rightarrow \mathfrak{S}_3$  donné par l'action de  $W_3$  sur les classes de conjugaison des générateurs; on note  $\text{Out}_0(W_3)$  son noyau. On a donc une suite exacte

$$1 \rightarrow \text{Out}_0(W_3) \rightarrow \text{Out}(W_3) \rightarrow \mathfrak{S}_3 \rightarrow 1.$$

On peut construire un scindement de cette suite exacte donné par  $(ij) \mapsto \omega_{ij}$  (on reprend la Notation 3.3). Il s'ensuit que  $\text{Out}(W_3) \cong \text{Out}_0(W_3) \rtimes \mathfrak{S}_3$ . Reste à déterminer  $\text{Out}_0(W_3)$ .

En utilisant la présentation de  $\text{Out}(W_3)$  de Fuchs-Rabinovich (Corollaire 3.5), on voit que  $\text{Out}_0(W_3)$  est engendré par les twists de Dehn (dans ce cas, il n'y a pas d'automorphismes de facteurs), avec les relations (0) et (4) – (5) (ce sont les seules qui ne font intervenir que des twists de Dehn). Chaque twist de Dehn est d'ordre 2.

En notant  $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^{(x_i)}$ , la relation (0) donne

$$\alpha_{12} = \alpha_{13}, \quad \alpha_{21} = \alpha_{23}, \quad \alpha_{31} = \alpha_{32}.$$

Les relations (4) – (5) s'en déduisent, ce qui donne finalement

$$\text{Out}_0(W_3) = \langle \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{31} \mid \alpha_{12}^2, \alpha_{21}^2, \alpha_{31}^2 \rangle.$$

On voit donc que  $\text{Out}_0(W_3) \cong W_3$ , et l'action de  $\mathfrak{S}_3$  est donnée par  $(12) \cdot \alpha_{12} = \alpha_{21}$ ,  $(12) \cdot \alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{31}$  et  $(23) \cdot \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{12}$ ,  $(23) \cdot \alpha_{31} = \alpha_{21}$ . Cela correspond bien à l'action de  $\mathfrak{S}_3$  par permutation des générateurs de  $W_3$ .

(ii) D'après (i), il suffit de construire un plongement  $W_3 \rtimes \mathfrak{S}_3 \hookrightarrow \text{Out}(F_4)$ . Pour cela, on note  $x_1, x_2, x_3$  les générateurs de  $W_3$ ,  $a_1, \dots, a_4$  les générateurs de  $F_4$ . On note  $\alpha_{ij} = \rho_{ij} \lambda_{ij}^{-1}$  les twists de Dehn dans  $F_4$  et  $\tau_i$  la réflexion  $a_i \mapsto a_i^{-1}$  (voir Notation

3.8). Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ , on pose de plus  $\omega_\sigma \in \text{Out}(F_4)$  donné par  $a_i \mapsto a_{\sigma(i)}$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  et  $a_4 \mapsto a_4$ .

On définit alors  $f : W_3 \times \mathfrak{S}_3 \rightarrow \text{Out}(F_4)$  par

$$\begin{aligned} x_i \in W_3 &\longmapsto \alpha_{i4}\tau_i = \tau_i\alpha_{i4}^{-1} \in \text{Out}(F_4), \\ \sigma \in \mathfrak{S}_3 &\longmapsto \omega_\sigma \in \text{Out}(F_4). \end{aligned}$$

On a  $f(x_i)^2 = 1$  et  $f(\sigma)f(x_i)f(\sigma)^{-1} = f(x_{\sigma(i)})$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ , donc  $f$  définit bien un morphisme de groupes  $W_3 \times \mathfrak{S}_3 \rightarrow \text{Out}(F_4)$ .

Reste à voir que  $f$  est injectif. Pour cela, soit  $\gamma = w\sigma \in \text{Ker } f$ , avec  $w \in W_3$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ . Comme  $f(\gamma) = 1$  dans  $\text{Out}(F_4)$ ,  $f(\gamma)$  agit trivialement sur les classes de conjugaison des  $a_i$ , donc  $\sigma = 1$ . On écrit sous forme normale  $w = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ , avec  $k \geq 0$ ,  $i_j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i_{j+1} \neq i_j$ . On a alors

$$\begin{aligned} f(\gamma) \cdot a_i &= a_i^{\pm 1} \quad \text{si } i \in \{1, 2, 3\} \\ f(\gamma) \cdot a_4 &= \text{ad} \left( a_{i_k}^{\varepsilon_k} \cdots a_{i_1}^{\varepsilon_1} \right) \cdot a_4, \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{\pm 1\}$ . Comme  $f(\gamma) = 1$  dans  $\text{Out}(F_4)$ , il s'ensuit que  $a_{i_k}^{\varepsilon_k} \cdots a_{i_1}^{\varepsilon_1} = 1$ . Comme c'est une forme réduite dans  $F_4$ , on doit avoir  $k = 0$ , donc  $w = 1$  et  $\gamma = 1$ . Ainsi,  $f : W_3 \times \mathfrak{S}_3 \hookrightarrow \text{Out}(F_4)$  est un plongement.  $\square$

Cet exemple confirme la non-exhaustivité de notre méthode : on a pu construire des plongements  $\text{Out}(W_n) \hookrightarrow \text{Out}(F_m)$  pour certains entiers  $n, m$ , mais il peut exister d'autres valeurs de  $n$  pour lesquelles  $\text{Out}(W_n)$  admet des représentations libres fidèles.

De manière générale, il semble très probable que le groupe  $\text{Out}(G)$  admette des représentations libres fidèles pour de nombreux produits libres  $G$  sur lesquels nous ne pouvons rien dire par la méthode développée ici.

# Références

- [1] Hyman Bass. Covering theory for graphs of groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 89(1-2) :3–47, 1993.
- [2] Mladen Bestvina, Mark Feighn, and Michael Handel. The Tits alternative for  $Out(F_n)$  I : Dynamics of exponentially-growing automorphisms. *Ann. of Math.*, 151(2) :517–623, 2000.
- [3] Martin R. Bridson and Karen Vogtmann. Abelian covers of graphs and maps between outer automorphism groups of free groups. *Math. Ann.*, 353(4) :1069–1102, 2012.
- [4] Donald J. Collins. The automorphism group of a free product of finite groups. *Arch. Math.*, 50(5) :385–390, 1988.
- [5] Marc Culler and Karen Vogtmann. Moduli of graphs and automorphisms of free groups. *Invent. Math.*, 84(1) :91–119, 1986.
- [6] Benson Farb and Dan Margalit. *A Primer on Mapping Class Groups*. Princeton Mathematical Series, Vol. 49. Princeton University Press, Princeton/Oxford, 2012.
- [7] David I. Fuchs-Rabinovich. O gruppakh avtomorfizmov svobodn̄ykh proizvedenī. I [On automorphism groups of free products. I]. *Mat. Sb.*, 8(50)(2) :265–276, 1940.
- [8] David I. Fuchs-Rabinovich. O gruppakh avtomorfizmov svobodn̄ykh proizvedenī. II [On automorphism groups of free products. II]. *Mat. Sb.*, 9(51)(1) :183–220, 1941.
- [9] Stephen M. Gersten. A presentation for the special automorphism group of a free group. *J. Pure Appl. Algebra*, 33(3) :269–279, 1984.
- [10] Nick D. Gilbert. Presentations of the automorphism group of a free product. *Proc. Lond. Math. Soc.*, s3-54(1) :115–140, 1987.
- [11] Igor A. Grushko. O bazisakh svobodnogo proizvedeniya grupp [On bases of free products of groups]. *Mat. Sb.*, 8(50)(1) :169–182, 1940.
- [12] Vincent Guirardel and Gilbert Levitt. The outer space of a free product. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 94(3) :695–714, 2007.
- [13] Camille Horbez. The Tits alternative for the automorphism group of a free product. arXiv :1408.0546, 2014.
- [14] Dawid Kielak. Outer automorphism groups of free groups : linear and free representations. *J. Lond. Math. Soc.*, 87(3) :917–942, 2013.
- [15] Alexander G. Kurosh. Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen. *Math. Ann.*, 109(1) :647–660, 1934.
- [16] Bernahrd Mühlherr. Automorphisms of free groups and universal Coxeter groups. In B. Gruber and M. Ramek, editors, *Symmetries in Science IX*, Language of science, pages 263–268. Springer, 1997.
- [17] Jakob Nielsen. Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen. *Math. Ann.*, 91(3-4) :169–209, 1924.

- [18] Jean-Pierre Serre. *Arbres, amalgames,  $SL_2$* . Astérisque, Tome 46. Société Mathématique de France, Paris, 1977.
- [19] Jacques Tits. Free subgroups in linear groups. *J. Algebra*, 20(2) :250–270, 1972.
- [20] Olga Varghese. The automorphism group of the universal Coxeter group. *Expo. Math.*, 39(1) :129–136, 2021.